Domenico Oliva

punto**exe**

L'esame di Analisi Matematica

Serie numeriche

Esercizi svolti e commentati

- Applicazione della definizione di serie
- Serie geometriche
- Serie a termini positivi
- Serie a termini di segno alterno
- Calcolo approssimato della somma delle serie numeriche

CD-Rom con:
Guida a Matlab
Software per il calcolo scientifico
Guida alle risorse internet per gli studenti

sistemi editoriali Se
Gruppo Editoriale Esselibri - Simone

Via F. Russo, 33/D
80123 Napoli

Azienda con sistema qualità certificato ISO 14001: 2003

Prima edizione: settembre 2005
Pt4 - Serie numeriche
ISBN 88-513-0297-9

Ristampe
8 7 6 5 4 3 2 1 2005 2006 2007 2008

Questo volume è stato stampato presso:
Officina Grafica Iride
Via Prov.le Arzano-Casandrino, VII Trav., 24 - Arzano (NA)

Della stessa collana:

Pt1 Limiti, continuità, calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale
Pt2 Studio di funzioni
Pt3 Integrali di funzioni di una variabile reale
Pt5 Successioni e serie di funzioni
Pt6 Limiti, continuità, calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali
Pt7 Integrali di funzioni di due o più variabili reali
Pt8 Equazioni differenziali

sistemi editoriali

Professionisti, tecnici e imprese
Gruppo Editoriale Esselibri - Simone

Coordinamento redazionale: Carla Iodice, Stefano Minieri

Impaginazione: Grafica 3

Prefazione

La conoscenza delle successioni numeriche e della teoria dei limiti è assolutamente indispensabile per la comprensione dei nuovi concetti richiesti per lo studio delle serie.
È per questo motivo che, nello sviluppo degli esercizi, si è dato ampio spazio allo svolgimento dei limiti, dove si sono privilegiate, sempre, le tecniche di esecuzione più elementari, ma non per questo meno significative. Ove il caso lo richiedeva, ovviamente, si è fatto ricorso alle regole di De L'Hospital, allo sviluppo di Mac Laurin, all'ordine degli infiniti e degli infinitesimi.
Gli esercizi, inizialmente, sono stati proposti per criterio di convergenza ed in ordine di difficoltà, al fine di permettere allo studente di acquisire padronanza e confidenza con i vari criteri. In secondo momento, nel capitolo "Miscellanea di esercizi sulle serie", sono stati, invece, presentati in maniera casuale, sia per criterio, sia per grado di difficoltà, così da costituire un verosimile allenamento alle prove d'esame.
Nel ringraziare tutti coloro i quali rivolgeranno la loro attenzione a questo compendio, si spera traendone benefici, si invita a segnalare le inesattezze che vi si dovessero riscontrare ed a presentare osservazioni e suggerimenti tesi alla realizzazione di una migliore comprensione del testo da parte dei destinatari.

Domenico Oliva

Indice dei simboli

$>$	*maggiore*
$<$	*minore*
$\geq$	*maggiore o uguale*
$\leq$	*minore o uguale*
$\neq$	*diverso da*
$\cong$	*circa uguale a*
$\pm$	*più o meno*
∞	*infinito*
$\rightarrow$	*tende a*
$\forall$	*per ogni*
$\in$	*appartiene*
$\notin$	*non appartiene*
$\cup$	*unione tra insiemi*
$\cap$	*intersezione tra insiemi*
$\subset$	*sottoinsieme proprio*
$\subseteq$	*sottoinsieme*
$\not\subset$	*non è sottoinsieme*
$\Rightarrow$	*implicazione*
$\Leftrightarrow$	*doppia implicazione*
N	*insieme dei numeri naturali*
N_0	*insieme dei numeri naturali incluso lo zero*
Z	*insieme dei numeri interi relativi*
R	*insieme dei numeri reali*
R^+	*insieme dei numeri reali positivi*
R^-	*insieme dei numeri reali negativi*
$n!$	*n fattoriale*
$\ln(\ )$	*logaritmo neperiano*
e	*numero di Nepero*
$\lim$	*limite*
$\left.\begin{matrix} f'(x) \\ \dfrac{df(x)}{dx} \end{matrix}\right\}$	*derivata*
$\int$	*integrale*
$\sum$	*sommatoria*
$\{a_n\}$	*successione*
a_n	*termine generico della successione*
s_n	*somma parziale o ridotta*

■ 1 Nozioni fondamentali

1.1 Definizione di serie. Generalità

1.1.1 Serie numeriche e successioni

Siano assegnati infiniti numeri reali, con una certa legge, costituenti la successione:

$$\{a_n\} = a_1,\ a_2,\ a_3,...$$

raggruppandoli con il segno di somma, si ottiene l'espressione:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1.1.1)$$

A questo simbolo viene dato il nome di **serie numerica reale** di termine generale a_n.

La somma di un numero **finito** di termini, disposti in un certo ordine, si effettua aggiungendo il primo termine al secondo, al risultato ottenuto il terzo e così via, fino all'esaurimento dei termini. Per un numero **infinito** di termini, tale operazione non ha, ovviamente, alcun significato; volendo attribuirne uno, è necessaria un nuova ed opportuna definizione di somma.

Si ponga:

$$\begin{aligned} & s_1 = a_1 \\ & s_2 = a_1 + a_2 \\ & ...\ ...\ ... \\ & s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \\ & ...\ ...\ ...\ ... \end{aligned}$$

Le somme s_1, s_2, ..., s_n, ... si chiamano **ridotte** o **somme parziali** della serie.

Si consideri ora la **successione**:

$$\{s_n\} = s_1,\ s_2,...,s_n,... \qquad (1.1.2)$$

a seconda che essa sia regolare, non regolare, convergente, divergente, infinitesima, infinitamente grande, si dirà che la serie è **regolare**, **non regolare**, **convergente**, **divergente**, **infinitesima**, **infinitamente grande**. Il comportamento di una serie sopra definito viene detto **carattere**.

Se la successione (1.1.2) converge ad un numero s, cioè se risulta:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \qquad (1.1.3)$$

si dice che la serie è convergente ed il numero è chiamato **valore** o **somma della serie** e si scrive:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = s \ \text{ oppure } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \qquad (1.1.4)$$

Nel raccomandare di non lasciarsi ingannare dalla precedente notazione, si ribadisce che la somma di una serie non può ottenersi eseguendo la somma, nel senso ordinario, dei suoi infiniti termini, poiché questa operazione non è eseguibile e non ha significato.
Se la successione delle ridotte è divergente o non regolare si dice che la serie è **divergente** o **non regolare** ed in tali casi la (1.1.1) resta un simbolo privo di significato.
Riassumendo, lo studio di una serie si traduce nello studio di una successione, in particolare di quella delle ridotte (1.1.2).

Viceversa, lo studio di una successione può ricondursi a quello di una serie. Si osservi, infatti che la successione:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, ...$$

può considerarsi la successione delle ridotte della serie:

$$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ...$$

le cui ridotte coincidono con i termini della successione assegnata.

Pertanto, i teoremi sulle successioni si traducono in teoremi sulle serie e viceversa.

Non tutte le successioni, in generale, partono dall'indice $n = 1$. Se si ha una successione che parte dall'indice p, con $p \in N$, la serie $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ ha lo stesso significato della serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dove $b_n = a_n + p - 1$.

ESEMPIO 1

Si consideri la serie:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$$

si trovi il termine generale della successione delle ridotte:

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

da cui:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

✌ la serie è, quindi, **convergente** e la somma vale 1.

ESEMPIO 2

Si consideri la serie:

$$1 + 2 + 3 + ... + n + ...$$

si trovi il termine generale s_n della successione delle ridotte:

$$s_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

da cui:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$$

✌ la serie è, quindi, **divergente**.

ESEMPIO 3

Si consideri la serie:

$$1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

si trovi il termine generale s_n della successione delle ridotte:

$$s_n = 0 \quad \text{per } n = 2k \qquad \text{(pari)}$$
$$s_n = 1 \quad \text{per } n = 2k + 1 \qquad \text{(dispari)}$$

✌ la serie è, quindi, **irregolare** o **indeterminata** o **oscillante**.

1.1.2 Serie geometrica di ragione *q*

Essendo q un qualsiasi numero reale, la serie geometrica di ragione q è del tipo:

$$1+q+q^2+\ldots.q^n+\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}q^n$$

Come ci insegna l'algebra elementare, in virtù della divisibilità per $(1-q)$ del binomio $(1-q^n)$, si ha:

$$s_n=1+q+q^2+\ldots.q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$$

da cui si trae che se $|q|<1$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}$$

la serie **converge** ed ha per somma $\frac{1}{1-q}$; se invece $|q|>1$, avendosi:

$$\lim_{n\to\infty}|s_n|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1-q^n}{1-q}\right|=+\infty$$

la serie **diverge**, infine, se $|q|=1$ la serie si scrive:

$$1+1+1+1+\ldots \qquad \text{se } q=1$$

$$1-1+1-1+\ldots \qquad \text{se } q=-1$$

quindi, nel primo caso **diverge**, nel secondo, per quanto visto nell'esempio n. 3 del paragrafo precedente, ha carattere **oscillante**.

ESEMPIO 1

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots.$$

questa è una serie geometrica di ragione $q=\frac{1}{3}$, essendo $|q|<1$ la serie converge alla somma:

✌ $s=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

ESEMPIO 2

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4+\ldots.=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\left[1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots.\right]=$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

✌ trattandosi di una serie geometrica di ragione $q=\frac{2}{\sqrt{3}}>1$, la serie diverge positivamente.

1.1.3 Serie telescopica

Una serie è detta **telescopica** se ha la seguente espressione:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)$$

l'espressione del termine generale delle ridotte è:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

per cui:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_1\right)$$

se invece l'espressione della serie telescopica è del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)$$

si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_1-a_{n+1}\right)$$

La serie presentata nell'esempio n. 1 del paragrafo 1.1.1 è di tipo telescopico**.**

ESEMPIO 1

Sia data la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$$

si determini il termine generale della ridotta s_n.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k}\ln\frac{n}{n+1} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\ln n - \ln(n+1)\right] = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \ldots. + \left[\ln k - \ln(k+1)\right] =$$

$$= \ln 1 - \ln(k+1) = -\ln(k+1)$$

da cui, essendo:

$$\lim_{k\to\infty} -\ln(k+1) = -\infty$$

✌ si deduce che la serie diverge negativamente.

1.2 Resto di una serie

Si definisce **resto *n* - esimo** di una serie, la serie che si ottiene da quella data sopprimendo i primi n termini, cioè:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots \tag{1.2.1}$$

le ridotte del resto r_n si chiamano **resti parziali** della serie. L'espressione generica del resto parziale di una serie è:

$$r_{n,p} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \tag{1.2.2}$$

Sussistono i seguenti teoremi:

TEOREMA

Se la serie (1.1.1) converge, converge anche la serie (1.2.1), qualunque sia n. Reciprocamente, se converge la serie (1.2.1) converge anche la (1.1.1). Oltre a ciò, detta s la somma della serie (1.1.1) e r_n quella della serie (1.2.1) risulta:

$$s = s_n + r_n$$

Se la serie (1.1.1) diverge o è irregolare, tale è anche la serie (1.2.1), qualunque sia n, e reciprocamente.

TEOREMA

La somma del resto n - esimo di una serie convergente è infinitesima per n → ∞, cioè:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty \tag{1.2.3}$$

1.3 Proprietà delle serie

Come già evidenziato, la somma di una serie ha un significato assolutamente diverso dalla somma ordinaria. Non si possono, quindi, ritenere estese alle serie le proprietà della somma ordinaria. Talvolta, infatti, per le serie, tali proprietà perdono la loro validità.

1.3.1 Proprietà distributiva

Sia k un qualsiasi numero reale diverso da zero, si prendano in considerazione le due serie:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.3.1}$$

$$ka_1 + ka_2 + ka_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} ka_n \tag{1.3.2}$$

si considerino le rispettive ridotte n - esime s_n e s'_n:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$s'_n = ka_1 + ka_2 + ka_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = ks_n$$

si vede che se $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ risulta:

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{n\to\infty} ks_n = ks$$

se invece:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$$

essendo $k \neq 0$, anche il $\lim_{n\to\infty} s'_n = \infty$.

Infine, se il $\lim_{n\to\infty} s'_n$ non esiste, lo stesso vale anche per $\lim_{n\to\infty} s'_n$.

Se ne conclude che le due serie hanno lo stesso carattere e se la (1.3.1) converge alla somma s, la (1.3.2) converge alla somma ks.

Quanto testé dimostrato non è altro che l'estensione alla somma delle serie della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

1.3.2 Proprietà associativa

Data la serie:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.3.3}$$

ed assegnata la successione di numeri naturali:

$$p_1 + p_2 + p_3, ... \tag{1.3.4}$$

poniamo:

$$b_1 = \sum_{i=1}^{p_1} a_i; \quad b_2 = \sum_{i=p_1+1}^{p_1+p_2} a_i; ..., ...$$

e consideriamo la serie:

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1.3.5}$$

questa serie si dice dedotta dalla serie (1.3.3) associandone i termini nel modo definito dalla successione (1.3.4).

Vale il seguente:

TEOREMA

Se la serie (1.3.3) converge, converge anche la serie (1.3.5) e converge verso la stessa somma della serie (1.3.3); se la serie (1.3.3) diverge, diverge anche la serie (1.3.5).

In conclusione, la somma delle serie convergenti e delle serie divergenti gode della proprietà associativa.

Per le serie oscillanti la proprietà perde di validità. Infatti, prendendo in esame la serie oscillante:

$$1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

si osserva che se associamo il primo termine con il secondo, il terzo con il quarto, e così via, si ottiene la serie convergente:

$$0 + 0 + 0 + ...$$

Leggendo questo risultato in senso inverso, se ne trae che per le serie non vale la proprietà dissociativa.

1.3.3 Proprietà commutativa

Cambiando l'ordine di un numero finito di termini di una serie convergente o divergente o non regolare, il carattere non cambia. In questo caso si dice che le serie godono della **proprietà commutativa in piccolo**.
Cambiando l'ordine di un numero infinito di termini, si ottiene una serie che diremo simile a quella data. Questa operazione, in generale, influisce sia sulla somma, sia sul carattere della serie.
In generale, quindi, le serie non godono della proprietà commutativa.
La proprietà vale, però, per le **serie assolutamente convergenti** e soltanto per esse.

1.4 Operazioni sulle serie

1.4.1 Somma e differenza

Siano date le due serie:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1.4.1)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (1.4.2)$$

La serie:

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... \qquad (1.4.3)$$

e la serie:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + ... \qquad (1.4.4)$$

si dicono, rispettivamente, serie somma e serie differenza delle serie (1.4.1) e (1.4.2).
Valgono per esse i seguenti teoremi:

TEOREMA

Se le serie (1.4.1) e (1.4.2) convergono, rispettivamente, verso le somme s e s' anche le serie (1.4.3) e (1.4.4) convergono e le loro somme valgono:

$$S = s + s'$$

$$S' = s - s'$$

TEOREMA

Se le serie (1.4.1) e (1.4.2) convergono assolutamente, lo fanno anche le serie (1.4.3) e (1.4.4).
È appena il caso di osservare che in caso di divergenza o di irregolarità delle serie (1.4.1) e (1.4.2) nulla può dirsi sul carattere delle serie (1.4.3) e (1.4.4).

ESEMPIO

Consideriamo le serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} = 1 + 0 - 1 + 0 + 1... \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n+1)\frac{\pi}{2} = -1 + 0 + 1 + 0 - 1...$$

✌ Entrambe sono oscillanti, ma la serie somma delle due:

$$\sum \left[\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} + \cos(n+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0 + 0 + 0 + ...$$

è convergente e la somma vale 0.

1.4.2 Prodotto secondo Cauchy di due serie

Date le serie (1.4.1) e (1.4.2) e posto:

$$c_1 = a_1 b_1;$$
$$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1;$$
$$... \quad ... \quad ...$$
$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1$$
$$... \quad ... \quad ...$$

la serie:

$$c_1 + c_2 + ... + c_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

si chiama **serie prodotto secondo Cauchy**.

Vale per essa il seguente:

TEOREMA

Se le serie (1.4.1) e (1.4.2) sono assolutamente convergenti, anche la serie prodotto secondo Cauchy è assolutamente convergente e la somma vale $s \cdot s'$.

1.5 Convergenza delle serie numeriche

Le serie di maggior interesse sono quelle convergenti, in quanto solo per esse, come già detto, è possibile attribuire un significato numerico ben preciso al simbolo:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Per stabilire la convergenza o la non convergenza di una serie, servendosi della definizione data di somma di una serie, bisogna studiare il limite:

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

essendo $\{s_n\}$ la successione delle ridotte della serie.

In generale, questo procedimento diretto è di difficile applicazione, perché quasi mai è agevole trovare un'espressione semplice per il termine s_n.

Si preferisce, pertanto, stabilire il carattere della serie con metodi indiretti. Assodata, poi, la convergenza, è sempre possibile determinare un valore approssimato della somma con l'approssimazione voluta. Infatti, detta s_n la ridotta n - esima di una serie convergente alla somma s si ha:

$$s - s_n = r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \qquad (1.5.1)$$

Risultando:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (s - s_n) = 0$$

detta $\varepsilon>0$ l'approssimazione voluta, è possibile, quindi, determinare un indice q tale che per $n>q$ si abbia:

$$|s - s_n| < \varepsilon$$

Da ciò si vede che purché sia $n>q$, s_n approssima il valore di s a meno di ε.

1.5.1 Criteri generali di convergenza

TEOREMA DI CAUCHY

Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie (1.1.1) sia convergente è che comunque si fissi un numero $\varepsilon>0$, si possa determinare in corrispondenza di esso un indice ν tale che per ogni $n>\nu$, e qualunque sia l'intero $p>0$, risulti:

$$|r_{n,p}| < \varepsilon$$

Tale teorema, pur essendo di fondamentale importanza teorica, è di scarsissimo interesse pratico, essendo, nei calcoli, di difficile applicazione.
Da esso, inoltre, di potrebbe dedurre il seguente teorema, ma si preferisce darne una dimostrazione più semplice.

TEOREMA

Condizione necessaria affinché la serie (1.1.1) sia convergente è che il termine generale sia infinitesimo per $n \to \infty$.

Se la serie (1.1.1) è convergente si ha:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

osservando che $a_n = s_n - s_{n-1}$ si trova che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(s_s - s_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

ESEMPIO 1

Che la precedente condizione non sia sufficiente è provato dalla serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge nonostante il $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Si dimostri che la serie armonica è divergente.

Per il teorema di Cauchy se la serie convergesse, fissato un $\varepsilon>0$ si dovrebbe poter determinare un indice v tale che per ogni $n > v$ risultasse:

$$|r_{n,p}| < \varepsilon \qquad (1.5.2)$$

In particolare, la (1.5.2) dovrebbe valere anche per $p = n$, cioè:

$$|r_{n,n}| < \varepsilon$$

Nel nostro caso, essendo:

$$\left|r_{n,n}\right| = r_{n,n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

si vede che la (1.5.2) non potrebbe mai essere verificata per $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$.

✌ Ciò prova che la serie armonica è divergente.

ESEMPIO 2

Si dimostri, applicando il teorema di Cauchy, che la serie:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

è convergente.

In questo caso:

$$|r_{n,p}| = r_{n,p} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + ... +$$

$$+\left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{p}{(n+1)(n+p+1)} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

da cui si ricava $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Cioè, posto $\nu = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$, non appena, $n > \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1 = \nu$ la (1.5.2) sarà soddisfatta qualunque sia p.

✌ La serie è, perciò, convergente.

ESEMPIO 3

Si studi, utilizzando il teorema di Cauchy, il carattere della serie detta serie armonica generalizzata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{con } \alpha > 0$$

✌ Il valore $\alpha = 0$ non viene contemplato, perché in tal caso la serie si scrive:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = 1 + 1 + 1 + ...$$

ed è divergente.

✌ Il valore $\alpha = 1$ fa coincidere la serie con la serie armonica, pertanto, anche in questo caso essa ha carattere divergente.

Si esamini, ora, il caso $\alpha < 1$.
Si consideri il generico resto parziale della serie:

$$r_{n,p} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$$

questa quantità, essendo la serie a termini positivi, coincide con il proprio valore assoluto, pertanto, la condizione di Cauchy diventa $|r_{n,p}| = r_{n,p} < \varepsilon$. Da cui:

$$r_{n,p} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^\alpha} > \frac{1}{(n+p)^\alpha} + \frac{1}{(n+p)^\alpha} + ... + \frac{1}{(n+p)^\alpha} = \frac{p}{(n+p)^\alpha}$$

se la serie fosse convergente, questa condizione dovrebbe valere anche per $p = n$, cioè:

$$r_{n,n} > \frac{p}{(n+p)^\alpha} = \frac{n}{(n+n)^\alpha} = \frac{n}{2^\alpha n^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha n^{\alpha-1}} = \frac{n^{1-\alpha}}{2^\alpha}$$

da cui si vede che, essendo $1 - \alpha > 0$, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, si può determinare un indice ν tale che per ogni $n > \nu$ tale riesca $r_{n,p} > \frac{n^{1-\alpha}}{2^\alpha} > \varepsilon$.

✌ In definitiva, la condizione di Cauchy è definitivamente non verificata e, pertanto, la serie diverge.

Esaminiamo, ora, il caso $\alpha > 1$.

$$r_{n,p} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n^{\alpha}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}\alpha\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\left[\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^{\alpha\frac{k}{n}}}$$

Invochiamo, a questo punto, la successione notevole $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ che è **strettamente crescente,** convergente ad ***e*** ed il cui primo termine vale 2.
Riprendendo l'espressione di $r_{n,p}$ possiamo operare le seguenti maggiorazioni:

$$r_{n,p} = \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\left[\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^{\alpha\frac{k}{n}}} < \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{\alpha\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n^{\alpha}} \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{n}}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{k\frac{\alpha}{n}}} < \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{k\frac{\alpha}{n}}} = \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{p-1} 2^{-k\frac{\alpha}{n}} =$$

$$= \frac{1}{n^{\alpha}} \frac{1-2^{-p\frac{\alpha}{n}}}{1-2^{\frac{\alpha}{n}}} < \frac{1}{n^{\alpha}} \frac{1}{1-2^{\frac{\alpha}{n}}}$$

si lascia, a questo punto, allo studioso lo studio della successione il cui termine generale è il risultato a cui si è pervenuto. Ci si limita qui, pertanto, ad utilizzare i risultati finali, allo scopo di portare a termine la dimostrazione.

La successione $\left\{\dfrac{1}{n^{\alpha}} \dfrac{1}{1-2^{\frac{\alpha}{n}}}\right\}$ è strettamente decrescente ed infinitesima per $n \to \infty$.

Da ciò si deduce che, fissato $\varepsilon>0$, si può sempre trovare un indice ν tale che, per ogni $n>\nu$, il resto parziale $r_{n,p}$ sia definitivamente $<\varepsilon$.

✌ Verificandosi, quindi, la condizione di Cauchy, la serie converge.

Si fa solo notare che è proprio nella parte di cui si è tralasciata la dimostrazione che interviene l'ipotesi $\alpha > 1$.

Sinteticamente, le proprietà della seria armonica generalizzata sono:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{convergente per } \alpha > 1 \\ \text{divergente per } 0 \le \alpha \le 1 \end{cases}$$

1.5.2 Serie a termini di segno costante

Premettiamo la seguente nozione.

Date due serie a termini reali:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

se, per ogni indice *i*, risulta $a_i \le b_i$ si dice che la prima serie è una **minorante** della seconda o, equivalentemente, che la seconda è minorata dalla prima; che la seconda serie è una **maggiorante** della prima o, equivalentemente, che la prima è maggiorata dalla seconda. Se l'ipotesi si verifica solo a partire da un indice v si dirà che la prima serie è definitivamente maggiorata dalla seconda.

È appena il caso di osservare che, dovendosi occupare delle serie a termini di segno costante, non si lede la generalità limitando lo studio solo a quelle con termini di segno positivo. Per questa classe di serie valgono i seguenti teoremi:

TEOREMA

Una serie a termini non negativi è sempre regolare, cioè, essa può essere convergente o divergente, mai oscillante. La somma di una serie convergente è l'estremo superiore della successione delle ridotte.

TEOREMA

Siano:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.5.3}$$

$$a'_1 + a'_2 + a'_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \tag{1.5.4}$$

due serie a termini non negativi, tali che ogni termine della (1.5.3) sia anche termine della (1.5.4). Se la serie (1.5.4) converge, tale è anche la serie (1.5.3) e la sua somma non supera quella della (1.5.4).

TEOREMA (ESTENSIONE DELLA PROPRIETÀ COMMUTATIVA)

Se la serie (1.5.3), a termini non negativi, converge, ogni serie che si ottenga da essa mutando l'ordine dei suoi termini converge ed ha per somma la stessa somma della (1.5.3).

1.5.3 Criteri di convergenza per le serie a termini di segno costante

I. Se la serie (1.5.3) è a termini positivi e se esistono 3 numeri h, q, v, di cui il primo minore di 1, tali che si abbia per $n>v$:

$$a_n \le qh^n$$

la serie (1.5.3) è convergente.

In effetti, con questo criterio, si confronta la serie assegnata con un serie geometrica di ragione $h<1$ e, quindi, convergente.

II. **1° Criterio del confronto o di Gauss**. Le minoranti, a termini non negativi, di una serie convergente convergono; le maggioranti, a termini non negativi, di una serie divergente divergono.

ESEMPIO 1

Si determini, con il criterio del confronto, la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$$

Si osservi che, trascurando il primo termine, a partire dal secondo, la serie può essere così scritta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots$$

Confrontando il termine generale di questa serie con il termine generale della serie nell'esempio n. 1 del paragrafo 1.1.1, si ha che, verificandosi:

$$\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

✌ la serie assegnata è maggiorata da una serie convergente, quindi, è a sua volta, convergente.

Esempio 2

Si studi il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + a} \quad \text{con} \, a > 0$$

La serie è a termini positivi, con a_n infinitesimo per $n \to \infty$, osservando che:

$$\frac{1}{n^3 + a} < \frac{1}{n^3}$$

✌ si conclude, invocando il teorema di Gauss, che la serie data, essendo maggiorata da una serie convergente (serie armonica generalizzata con $\alpha = 3$) è, a sua volta convergente.

Esempio 3

Si determini il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n}$$

La serie è a termini positivi, con il termine generale a_n infinitesimo per $n \to \infty$, e osservando che:

$$\frac{1}{n^2 + 4n} < \frac{1}{n^2}$$

✌ si conclude che la serie è maggiorata da una serie convergente, quindi, a sua volta è convergente.

Esempio 4

Si determini il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \ln\left(n^3 + 1\right)}$$

Si tratta di una serie a termini positivi con il termine generale a_n tale che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2 + \ln\left(n^2 + 1\right)} = 0$$

analizzando il termine generale a_n, si trova:

$$a_n = \frac{n}{n^2 + \ln(n^2+1)} > \frac{n}{n^2 + (n^2+1)} = \frac{n}{2n^2+1} = \frac{n}{2\left(n^2 + \frac{1}{2}\right)} > \frac{n}{2(n^2+1)} = \frac{n}{2(n+1)^2} =$$

$$= \frac{n}{2(n+1)(n+1)}$$

osserviamo, a questo punto, che:

$\frac{n}{n+1} > \frac{1}{2}$ per n tale che $2n > n-1$ cioè per $n>1$, in definitiva possiamo operare l'ultima minorazione:

$$a_n > \frac{1}{2}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{4(n+1)}$$

✌ Pertanto, essendo la serie minorata da un serie divergente (serie armonica), è anch'essa divergente.

III. **Criterio del confronto asintotico o di Riemann**. Siano date le due serie, a termini non negativi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

sia $b_n \neq 0$ definitivamente a partire da un certo indice ν, se:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ (finito) le due serie hanno lo stesso carattere;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e la seconda converge, converge anche la prima;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e la seconda diverge, diverge anche la prima.

Per applicare questo criterio è conveniente esaminare il termine generale della serie, cercando di intuirne il comportamento per $n \to \infty$. Si sceglie, infine, come serie di confronto, la serie che ha come termine generale il termine intuitivamente dedotto.

ESEMPIO

Si determini il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \log n^3 + \sqrt{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}}{3n^4 + \sqrt[3]{n^2+n}}$$

Si osservi che:

$$a = \frac{n^2 + \log n^3 + \sqrt{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}}{3n^4 + \sqrt[3]{n^2+n}} = \frac{n^2 + 3\log n + \sqrt{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}}{3n^4 + \sqrt[3]{n^2+n}}$$

per $n \to \infty$ si vede che, trascurando i termini che diventano meno significativi, si ha:

$$a_n \to \frac{n^2}{3n^4} = \frac{1}{3n^2}$$

Si scelga, pertanto, come serie di confronto la serie che ha per termine generale il termine:

$$b_n = \frac{1}{3n^2} \quad \text{(serie armonica generalizzata con } \alpha = 2\text{)}$$

A questo punto, invocando il criterio del confronto asintotico:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^2 + 3\log n + \sqrt{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}}}{3n^4 + \sqrt[3]{n^2+n}}}{\dfrac{1}{3n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2\left(n^2 + 3\log n + \sqrt{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}}\right)}{3n^4 + \sqrt[3]{n^2+n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 + 9n^2\log n + 3n^2\sqrt{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}}}{3n^4 + \sqrt[3]{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{3}{n^2}\log n + \sqrt{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}}}{1 + \sqrt[3]{\dfrac{1}{9n^2} + \dfrac{1}{9n}}} = 1$$

✌ Da cui, essendo il limite finito e la serie di confronto convergente, si conclude che la serie assegnata converge.

IV. Se la serie (1.5.3) è a termini positivi e se esistono 3 numeri positivi a, q, v, tali che per $n>v$ si abbia:

$$a_n < \frac{q}{n^{1+a}}$$

la serie (1.5.3) è convergente.

V. Se la serie (1.5.3) è a termini positivi e se esistono 2 numeri positivi q, v, tali che per $n>v$ si abbia:

$$a_n > \frac{q}{n}$$

la serie (1.5.3) è divergente.

VI. I due precedenti criteri non fanno altro che confrontare, tramite il rapporto dei termini corrispondenti (confronto asintotico), la serie assegnata con la seria armonica generalizzata. In genere, però si preferisce fare riferimento alla seguente formulazione, diretta conseguenza delle due precedenti:

Criterio dell'ordine infinitesimo o di Riemann. Sia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie a termini non negativi, con $a_n \to 0$ per $n \to \infty$, sia α un qualsiasi numero reale positivo, se si verifica che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}} = l > 0$$

essendo $0 < \alpha \leq 1$, la serie diverge.

Se, invece si verifica che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}} = l \neq \infty$$

essendo $\alpha>1$, la serie converge.

ESEMPIO 1

Si determini il carattere della serie già proposta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+4}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha}+4n^{-\alpha}}$$

✌ Da cui se ne deduce che, per essere il limite finito e $\neq 0$, deve essere $\alpha = 2>1$ e, quindi, la serie ha carattere convergente.

ESEMPIO 2

Si determini il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{n^3+2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^{3\alpha}}{n^3+2}}$$

✌ si osserva che, per essere il limite finito e $\neq 0$ deve essere $\alpha = 1$; la serie è, pertanto divergente.

VII. Criterio del rapporto (**o di D'Alembert**). Se la serie (1.5.3) è a termini positivi e se esiste un indice ν tale che per ogni $n \geq \nu$ si abbia:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq h \qquad \text{con}\, h < 1$$

allora la serie converge.
Se invece si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq h \qquad \text{con}\, h \geq 1$$

allora la serie diverge.
Si preferisce, però, usare il criterio nella seguente formulazione, diretta conseguenza della precedente:

VIII. Criterio di d'Alembert. Se la serie (1.5.3) è a termini positivi, la serie converge se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

diverge se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Nulla può dirsi se il $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ (bisogna ricorrere ad altri criteri).

ESEMPIO 1

Si determini il carattere della serie a termini positivi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n} \qquad \text{con } a > 0$$

Volendo utilizzare il criterio del rapporto, si calcoli:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n+1}{a^{n+1}}}{\dfrac{n}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a^n}{na^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{a^n}{a^{n+1}} \right] = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right) \right] \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

✌ da cui si trae che per $a > 1$ la serie converge, per $a \leq 1$ la serie diverge.

ESEMPIO 2

Si determini il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \right] = \lim_{n\to\infty} \left[(n+1) \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[(n+1) \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{n+1} \right] = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1$$

✌ la serie, quindi, è positivamente divergente.

ESEMPIO 3

Si determini il carattere della serie armonica generalizzata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}}{\dfrac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{1+n} \right)^\alpha = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \right)^\alpha = \left(\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}} \right)^\alpha = 1$$

✌ Nulla può dirsi, con questo criterio di convergenza, tendendo il limite ad 1.

IX. **Criterio di Raabe**. Se la serie (1.5.3) è a termini positivi e se esiste un indice tale che per ogni $n>\nu$ si abbia:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>k \qquad \text{con}\, k>1$$

allora la serie converge.
Se, invece:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq k \qquad \text{con}\, k\leq 1$$

allora la serie diverge.

IX′. **Criterio di Raabe**. In pratica, si preferisce usare il criterio di Raabe nella seguente formulazione, diretta conseguenza della precedente:

Se la serie è a termini positivi, la serie converge se:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1;$$

diverge se:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1;$$

nulla può dirsi se $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=1$ (bisogna ricorrere ad un altro criterio).

Esempio 1

Si trovi il carattere della serie armonica generalizzata:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$

Si trovi il limite:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}-1\right]=\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^\alpha-1\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1}{\frac{1}{n}}\right]=\alpha$$

✌ Si ritrova, quindi, il risultato già noto che per $\alpha>1$ la serie converge, e per $\alpha<1$ la serie diverge.

Esempio 2

Si trovi il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$$

Si premette che il limite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

e, quindi, la serie è divergente. Si vuole, però, verificare il risultato applicando il criterio di Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\dfrac{n}{n+1}}{\dfrac{n+1}{n+2}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}\right] = 0 < 1$$

✌ Risultando tale limite inferiore ad 1, la serie ha, come già trovato, carattere divergente.

ESEMPIO 3

Si determini il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\dfrac{1}{n^2+4}}{\dfrac{1}{(n+1)^2+4}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(n+1)^2+4}{n^2+4} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{n^2+4}\right) = 2 > 1$$

✌ Essendo il limite maggiore di 1, se ne conclude che la serie converge.

X. **Criterio della radice o di Cauchy**. Se la serie (1.5.3) è a termini non negativi, e se esiste il:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

essa è convergente se $l < 1$; non è convergente se $l > 1$. Nulla può dirsi se $l = 1$.

Si potrebbe dimostrare che se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, anche $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ sia che l sia finito sia che sia infinito, mentre non è vero il contrario (*v.* esercizio n. 2.3.4.11).
Ciò significa che il criterio della radice è più generale di quello del rapporto, anche se quest'ultimo è tecnicamente più semplice.

ESEMPIO

Si trovi il carattere della serie:

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

✌ Essendo il limite inferiore ad 1, la serie è convergente.

XI. Criterio di condensazione (di **Cauchy**). Sia data la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a termini non negativi, decrescenti,cioè:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ...$$

essa converge se e solo se converge la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

ESEMPIO

Si determini, con questo criterio, il carattere della serie armonica generalizzata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Esaminiamo, all'uopo, la serie, i cui termini sono strettamente decrescenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{\left(2^n\right)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha - n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2^{\alpha-1}\right)^n}$$

detta serie è una serie geometrica di ragione $q = \dfrac{1}{2^{\alpha-1}}$.

✌ Le disuguaglianze $|q| \geq 1$ e $|q| < 1$ sono soddisfatte, rispettivamente, per $\alpha \leq 1$ e per $\alpha > 1$, ritrovando, così, i risultati già noti.

XII. Criterio di Dirichlet. Se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

è una serie la cui successione delle ridotte è limitata, se $\{b_n\}$ è una successione a termini positivi, decrescente ed infinitesima, allora la serie è a termini positivi e se risulta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ è convergente.

XIII. Criterio del logaritmo. Se la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

è a termini positivi e se risulta:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln a_n}{\ln n} < -1$ allora la serie converge;

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln a_n}{\ln n} \geq -1$ allora la serie diverge.

ESEMPIO

Si trovi il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

Si studi il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{\ln n}{n^2}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n-\ln n^2}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}-2\right)=-2<-1$$

✌ la serie, pertanto, è convergente.

XIV. Criterio integrale di Cauchy. Sia assegnata una serie a termini positivi non crescenti, cioè, per i termini della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+...$$

valgano le seguenti disuguaglianze:

$$a_1\geq a_2\geq a_3\geq ...$$

Se esiste una funzione $f(x)$ positiva, continua, non crescente e tale che per x=1,2,3… valgano le seguenti relazioni:

$$f(1)=a_1\quad f(2)=a_2\quad f(3)=a_3\quad ...$$

si può affermare che la serie risulta convergente o divergente a seconda che l'integrale improprio:

$$\int_1^{\infty}f(x)dx$$

converga o diverga.

ESEMPIO

Si trovi il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$$

Si consideri la funzione associata:

$$f(x)=e^{-x}$$

che è positiva continua e strettamente decrescente nell'intervallo $(-1,+\infty)$.

Poiché l'integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\lim_{M\to\infty}\int_1^{M}e^{-x}dx=\lim_{M\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^M=\lim_{M\to\infty}\left[\left(-e^{-M}\right)-\left(-e^{-1}\right)\right]=e^{-1}$$

✌ converge, converge anche la serie assegnata.

1.5.4 Serie a termini di segno alterno

Una serie numerica reale dicesi **a termini di segno alterno** se i suoi termini di posto dispari sono tutti positivi e quelli di posto pari sono tutti negativi, o viceversa.
Una tale serie può scriversi sotto la forma:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+... \tag{1.5.5}$$

con gli a_n tutti positivi o tutti negativi.

Per le serie di tale tipo vale il seguente:

TEOREMA (DI LEIBNIZ)

La serie (1.5.5) a termini di segno alterno è convergente se la successione $\{a_n\}$ è monotona ed infinitesima. Inoltre, l'errore che si commette prendendo il valore della somma della ridotta s_n in luogo del valore della somma *s,* non supera $|a_{n+1}|$.

1.5.5 Serie convergenti assolutamente

La serie (1.5.3) si dice assolutamente convergente se converge la serie formata con i valori assoluti dei suoi termini, cioè, se converge la serie:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots \tag{1.5.6}$$

Vale per dette serie il seguente:

TEOREMA

Una serie assolutamente convergente è anche convergente, cioè se converge la (1.5.6) converge anche la (1.5.3).
Quando una serie converge, ma non assolutamente si dice semplicemente convergente.
Tutti i criteri di convergenza formulati per serie a termini positivi conservano la loro validità anche per le serie formate con i valori assoluti.

■ 4 Calcolo approssimato della somma delle serie numeriche

4.1 Introduzione

Nel capitolo primo si è visto che, assumendo come somma di una serie convergente la sua ridotta di indice n, cioè considerando:

$$s \cong s_n$$

si commette un errore che è dato dal resto n - esimo:

$$r_n = s = s_n$$

È palese che determinare la somma di una serie con una data approssimazione ha senso quando non si è in grado di determinare s. Quando non si può conoscere esattamente s, non si può conoscere esattamente neanche l'errore r_n. Ai fini pratici, però, non è importante conoscere con precisione r_n, bensì un suo maggiorante.

In generale, relativamente alla somma delle serie si incontrano i seguenti quesiti:

- noto n stabilire una maggiorazione $\varepsilon > 0$ del valore dell'errore assoluto che si commette assumendo come somma s_n in luogo di s;
- determinare un indice n in guisa tale che s_n approssimi s a meno di un prefissato numero $\varepsilon > 0$, cioè in modo che sia $|s - s_n| < \varepsilon$, ovvero $|r_n| < \varepsilon$.

Come l'applicazione del teorema di Cauchy per la convergenza delle serie, in generale, è di difficilissima applicazione, allo stesso modo si rivela ardua la risoluzione dei problemi suesposti. In alcuni casi, però, la soluzione si presenta particolarmente semplice:

- serie convergenti a segni alterni, per le quali, come già noto, l'errore che si commette sostituendo s_n a s è $|r_n| < |a_{n+1}|$;
- serie convergenti a termini positivi (o negativi) per le quali è applicabile il criterio del rapporto, in quanto, è dimostrabile che, essendo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l \neq 1$, si ha:

$$|r_n| < \left|\frac{a_{n+1}}{1-l}\right|$$

- serie geometriche e serie telescopiche, per le quali peraltro, non sussiste la necessità dell'approssimazione, essendo sempre noto l'esatto valore della somma.

4.2 Esercizi

Esercizio n. 4.2.1

Data la serie geometrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$ si determini l'espressione del resto n - esimo r_n.

Si ribadisce che in questo caso non sussiste la necessità dell'approssimazione, essendo nota la somma $s = a\dfrac{1}{1-q}$:

$$r_n = s - s_n = \sum_{k=n}^{\infty} aq^k = aq^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{aq^n}{1-q}$$

Esercizio n. 4.2.2

Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ si determini l'errore che si commette arrestando la somma al 6° termine.

Essendo $q<1$ la serie converge alla somma:

$$s=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

Pertanto:

$$s_6=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}\cong 1{,}49794$$

$$|r_6|=r_6=s-s_6=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\cong 0{,}00205<10^{-2}$$

✌ l'errore commesso è inferiore a 10^{-2}.

Esercizio n. 4.2.3

Data la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^5$, si determini a quale termine bisogna arrestare la somma affinché si commetta un errore 10^{-6}.

Si osservi, innanzi tutto, che:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^5=\frac{1}{5^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^5$$

Essendo $q=\frac{1}{5}<1$, la serie converge alla somma $s=a\frac{1}{1-q}=\frac{1}{25}\frac{5}{4}=\frac{1}{20}=0{,}05$.

L'errore commesso, arrestando la somma la termine n - esimo, è:

$$r_n=a\frac{q^n}{1-q}=aq^n\frac{1}{1-q}=aq^ns=\frac{1}{25}\left(\frac{1}{5}\right)^n\frac{5}{4}=\frac{1}{4\cdot 5^{n+1}}<10^{-6}\quad\Rightarrow\quad 4\cdot 5^{n+1}>10^{-6}\quad\Rightarrow$$

✌

$$\ln 4+(n+1)\ln 5>6\ln 10\quad\Rightarrow\quad n>\left[\frac{6\ln 10-\ln 4}{\ln 5}-1\right]+1=\left[\frac{6\ln 10-\ln 4}{\ln 5}-1\right]=7$$

Avendo indicato con il simbolo [ ] la parte intera della quantità in esso contenuto.

A verifica di quanto trovato:

$$s_7=\frac{1}{25}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\frac{1}{625}+\frac{1}{3125}+\frac{1}{15625}\right)\cong 0{,}04999936$$

$$r_7=s-s_7=0{,}05-0{,}04999936=0{,}00000064<10^{-6}$$

Esercizio n. 4.2.4

Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n(n+2)}$ determinare:

a) l'approssimazione, arrestando la somma al 5° termine;
b) a quale termine bisogna arrestare la somma affinché l'imprecisione sia inferiore a 10^{-7}.

Tale serie è stata studiata nell'esercizio n. 2.1.5.

a) La somma, la ridotta generica ed il resto generico sono, rispettivamente:

$$s=\frac{1}{4}=0,25 \qquad s_n=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6(n+2)} \qquad r_n=\frac{1}{6(n+2)}$$

Quindi:

$$s_5=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5+2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{42}=\frac{19}{84} \qquad r_5=\frac{1}{6(5+2)}=\frac{1}{42}\cong 0,0238<10^{-1}$$

b) Per ottenere la precisione richiesta:

$$r_n=\frac{1}{6(n+2)}<10^{-7} \quad\Rightarrow\quad 6(n+2)>10^{-7} \quad\Rightarrow\quad n>\frac{10^7}{6}-2\cong\frac{10^7}{6}=1.666.667$$

Esercizio n. 4.2.5

Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$ si determini:

a) l'errore arrestando la somma al 6° termine;
b) a quale termine bisogna arrestare la somma per avere una imprecisione $<10^{-8}$.

La serie è stata studiata nell'esercizio n. 2.3.4.3.

a) Essendo $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{e}$ si ha:

$$|r_n|<\left|\frac{a_{n+1}}{l-1}\right|=\frac{(n+1)^2e^{-(n+1)}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{(n+1)^2e^{-n}}{e-1}<10^{-8} \quad\Rightarrow\quad \frac{e-1}{(n+1)^2}e^n<10^{-8} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \ln(e-1)+n-2\ln(n+1)>8\ln 10 \quad\Rightarrow\quad n-2\ln(n+1)>8\ln 10-\ln(e-1)=17,3$$

b) Dopo pochi tentativi si trova $n>24$.

Esercizio n. 4.2.6

Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3}$ determinare:

a) l'imprecisione che si determina assumendo come somma la 5ª ridotta;
b) a quale termine bisogna arrestare la somma per avere un errore $<10^{-6}$;
c) per lo stesso valore di n trovato sopra si trovi l'errore relativo alla somma della serie dei valori assoluti.

a) Si vede subito che la serie dei valori assoluti converge, essendo una serie armonica generalizzata con $\alpha = 3$.

Per le proprietà delle serie a termini di segno alterno convergenti si ha:

$$|r_n| < |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^3}$$

da cui si ricava:

$$|r_5| < |a_6| = \frac{1}{(6+1)^3} = \frac{1}{343} \cong 0{,}003 < 10^{-2}$$

b) Volendo contenere l'imprecisione entro 10^{-6}, cioè:

$$|r_n| < 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(n+1)^3} < 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad (n+1)^3 < 10^6 \quad \Rightarrow \quad n > 10^2 - 1 = 99$$

c) Per quantificare l'errore che si commette, per la serie dei valori assoluti, arrestando la somma al 99° termine, si invochi la formula trovata nell'esempio n. 3 del paragrafo 1.5.1:

$$|r_n| = \frac{1}{n^\alpha}\frac{1}{1-2^{\frac{\alpha}{n}}} = \frac{1}{99^3}\frac{1}{1-2^{\frac{3}{99}}} = 5 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$$

Che l'errore trovato, nel caso della serie dei valori assoluti, sia maggiore ($10^{-4} > 10^{-6}$) di quello calcolato, a parità di *n,* per la serie assegnata, è in armonia con il fatto che per la prima, dopo l'indice *n,* tutti i termini sono positivi.

APPENDICE

LIMITI FONDAMENTALI UTIZZATI

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0 \quad \text{ove } a > 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^a}{n!} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^a} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln^a n}{n} = 0 \quad \text{ove } a > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{an}}{n^q} = +\infty \quad \text{ove } a, q > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a - 1}{x} = a \quad \text{ove } a \in R$$

$$\lim_{x\to -\infty} x^q e^{ax} = 0 \quad \text{ove } q \in N \text{ e } a \in R^+$$

$$\lim_{x\to 0} x^p \ln x = 0 \quad \text{ove } p > 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad \text{ove } a > 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{ove } a > 0$$

Indice generale