

RESTART

fondamenti • esercizi guidati • verifiche di autovalutazione

**CARMELO
DI STEFANO**

Lezioni di

MATEMATICA

- ▶ ALGEBRA
- ▶ LOGICA
- ▶ GEOMETRIA
- ▶ GEOMETRIA ANALITICA
- ▶ GONIOMETRIA
- ▶ TRIGONOMETRIA

EDIZIONI
SIMONE[®]

Gruppo Editoriale **Simone**

sistemi editoriali **Se**[®]

TUTTI I DIRITTI RISERVATI

Vietata la riproduzione anche parziale

Tutti i diritti di sfruttamento economico dell'opera appartengono alla Simone S.p.A.
(art. 64, D.Lgs. 10-2-2005, n. 30)

Progetto grafico a cura di Gianfranco De Angelis

Impaginazione e realizzazione grafici Lucia Molino

Finito di stampare nel mese di gennaio 2017
dalle «Arti Grafiche Italo Cernia» - Via Capri, n. 67 - Casoria (NA)
per conto della Simone S.p.A. - Via F. Russo, 33/d - 80123 - Napoli

Premessa

La matematica è probabilmente la disciplina più impopolare agli occhi degli studenti che, spesso, ne rifiutano il linguaggio in quanto ritenuto troppo formalizzato e astratto. D'altro canto, la matematica è una delle discipline cardine della preparazione degli studenti sia alle superiori, sia in molti Corsi di Laurea (da Matematica, a Farmacia, da Economia a Ingegneria, da Agraria ad Architettura, etc.) e le eventuali lacune accumulate in questa materia rischiano di compromettere, o diminuire, le aspettative future dei giovani in merito alla loro formazione e/o all'ingresso nel mondo del lavoro.

Questo volume è stato redatto con lo scopo precipuo di agevolare gli studenti nella ripetizione e nell'assimilazione dei principali argomenti di matematica. Ciascun capitolo è introdotto da un *test di accertamento dei prerequisiti*, cui segue una parte teorica, esplicativa dell'argomento sviluppato, corredata da numerosi esempi e grafici; i paragrafi sono completati da *esercizi guidati*, in cui le fasi relative allo svolgimento, sono illustrate e commentate, tenendo conto delle esigenze dello studente che affronta una materia il cui contenuto, ricco di formule e grafici, richiede un impegno assiduo; inoltre, sulla falsariga degli esercizi svolti, sono proposti *numerosi esercizi da svolgere* e, a completamento dei capitoli, per un ulteriore ripasso degli argomenti, sono presentate *verifiche di autovalutazione*.

I contenuti e il livello di approfondimento degli argomenti sono stati calibrati sul breve tempo generalmente a disposizione degli studenti, ponendo l'accento sull'uso pratico degli strumenti matematici piuttosto che su un'eccessiva formalizzazione degli stessi. Così strutturato, il volume risulta efficace:

- per gli **studenti delle superiori** alle prese con un compito in classe o con una interrogazione di matematica, o con la preparazione della prova di matematica degli esami di stato: le nozioni svolte nel testo consentono di verificare il grado di preparazione raggiunto e di ripassare agevolmente gli argomenti trattati;
- per gli studenti che hanno bisogno di ripetere efficacemente e rapidamente le principali nozioni di matematica oggetto dei **test di ammissione e di accesso ai Corsi di Laurea** in Medicina, Veterinaria, Professioni Sanitarie, Farmacia, Scienze Motorie, Architettura, Ingegneria, Economia, Psicologia, Agraria, Matematica, Fisica, Scienze Biologiche, Scienze Biotecnologiche, Informatica etc.;
- per le matricole universitarie alle prese con il **recupero del debito di matematica** o **impegnate nei precorsi di matematica**, ovvero in quei corsi organizzati da alcune Facoltà, in cui sono riproposte le nozioni che gli studenti dovrebbero aver assimilato durante gli anni delle scuole superiori, in modo da consentire agli stessi di frequentare proficuamente i corsi di matematica della loro Facoltà;
- per quanti preparano i **concorsi per l'accesso ad alcune carriere militari** (ad esempio, nei test selettivi per l'accesso all'accademia dell'Esercito sono previste domande di algebra, geometria euclidea, geometria analitica e trigonometria).

In definitiva, obiettivo del volume è quello di sintetizzare tutte le principali conoscenze matematiche di base, indispensabili per affrontare con maggiore serenità molte delicate prove scolastiche, preuniversitarie, universitarie e concorsuali.

STRUTTURA DELL'OPERA

ALGEBRA 1

Insiemistica
Algebra dei polinomi
Operazione di divisione fra polinomi
Equazioni e disequazioni algebriche

ALGEBRA 2

Numeri irrazionali e numeri complessi
Equazioni e disequazioni irrazionali
Logaritmi ed esponenziali
Calcolo combinatorio e delle probabilità
Progressioni aritmetiche e geometriche

LOGICA e GEOMETRIA

Logica dei predicati
Geometria del piano
Geometria dello spazio

GEOMETRIA ANALITICA

Punti e rette nel piano cartesiano
Trasformazioni geometriche
Coniche nel piano cartesiano

GONIOMETRIA e TRIGONOMETRIA

Risoluzione dei triangoli
Identità goniometriche fondamentali
Equazioni e disequazioni goniometriche

ALGEBRA 1

Insiemistica

Algebra dei polinomi

Operazione di divisione fra polinomi

Equazioni e disequazioni algebriche

SINTESI DEI CONTENUTI

Questa sezione presenta gli argomenti fondamentali dell'algebra elementare concernenti l'**insiemistica** (*concetto di insieme, operazioni insiemistiche, sottoinsiemi di un insieme*), l'**algebra dei polinomi** (*concetto di potenza a base reale ed esponente intero, monomi, polinomi e operazioni con essi*), l'**operazione di divisione fra polinomi** (*divisione nell'insieme dei polinomi, scomposizione dei polinomi in fattori e operazioni fra frazioni algebriche*) e le **equazioni e disequazioni algebriche** (*equazioni algebriche in un'incognita, disequazioni algebriche, sistemi di equazioni e disequazioni algebriche*).

Ciascun capitolo è strutturato in:

- test di accertamento dei prerequisiti
- teoria
- esercizi svolti con soluzione guidata
- esercizi da svolgere (con soluzione a fine capitolo)
- verifiche di autovalutazione

SIMBOLOGIA

$<$	$x < y$ indica che un numero x è minore di un numero y
\leq	$x \leq y$ indica che un numero x non è maggiore di un numero y
$>$	$x > y$ indica che un numero x è maggiore di un numero y
\geq	$x \geq y$ indica che un numero x non è minore di un numero y
\pm	$x = \pm a$ indica $x = + a$ e $x = - a$
Δ	delta o discriminante di un'equazione di II grado
$ $	valore assoluto di un numero
\in	appartenenza di un elemento a un insieme
\notin	non appartenenza di un elemento a un insieme
\cup	unione insiemistica
\cap	intersezione insiemistica
\setminus	differenza insiemistica
Δ	differenza simmetrica insiemistica
$\emptyset, \{\}$	insieme vuoto
\subset	inclusione fra insiemi diversi
\subseteq	inclusione fra insiemi diversi o uguali

Capitolo 1: Insiemistica

Test di accertamento dei prerequisiti	Pag.	10
1.1. Concetto di insieme	»	12
1.1.1. Rappresentazioni per elenco	»	12
1.1.2. Rappresentazioni per diagrammi	»	15
1.1.3. Rappresentazioni per proprietà caratteristica.....	»	15
1.2. Operazione insiemistiche.....	»	19
1.2.1. Operazione di intersezione.....	»	19
1.2.2. Operazione di unione.....	»	23
1.2.3. Operazione di differenza	»	27
1.2.4. Operazione di differenza simmetrica	»	32
1.3. Sottoinsiemi di un insieme	»	36
Verifica finale.....	»	37
Risposte esatte.....	»	40

Capitolo 2: Algebra dei polinomi

Test di accertamento dei prerequisiti	»	46
2.1. Concetto di potenza a base reale ed esponente intero.....	»	48
2.2. Monomi, polinomi e operazioni con essi.....	»	54
2.2.1. Monomi	»	54
2.2.3. Polinomi	»	57
2.2.3. Prodotti notevoli.....	»	60
Verifica finale.....	»	67
Risposte esatte	»	71

Capitolo 3: L'operazione di divisione fra polinomi

Test di accertamento dei prerequisiti	»	76
3.1. Divisione nell'insieme dei polinomi	»	78
3.2. Scomposizione dei polinomi in fattori e operazioni fra frazioni algebriche.....	»	90
Verifica finale.....	»	106
Risposte esatte	»	111

Capitolo 4: Equazioni e disequazioni algebriche

Test di accertamento dei prerequisiti	Pag. 116
4.1. Equazioni algebriche in una incognita.....	» 118
4.2. Disequazioni algebriche.....	» 128
4.2.1. Equazioni e disequazioni in valore assoluto	» 134
4.3. Sistemi di equazioni e/o disequazioni algebriche.....	» 141
Verifica finale.....	» 165
Risposte esatte	» 169

ALGEBRA 2

Capitolo 1: Numeri irrazionali e numeri complessi. Equazioni e disequazioni irrazionali

Test di accertamento dei prerequisiti	» 184
1.1. I numeri irrazionali	» 186
1.2. Operazioni con i radicali.....	» 193
1.3. Razionalizzazione di denominatori	» 199
1.4. Numeri complessi	» 203
1.5. Equazioni irrazionali in una incognita.....	» 211
1.6. Disequazioni irrazionali in una incognita.....	» 215
Verifica finale.....	» 222
Risposte esatte.....	» 225

Capitolo 2: Logaritmi ed esponenziali

Test di accertamento dei prerequisiti	» 232
2.1. La funzione esponenziale e la funzione logaritmo	» 234
2.2. Risoluzione di equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche	» 246
Verifica finale.....	» 255
Risposte esatte.....	» 258

Capitolo 3: Calcolo combinatorio e delle probabilità. Progressioni aritmetiche e geometriche

Test di accertamento dei prerequisiti	Pag.	264
3.1. Calcolo combinatorio	»	266
3.1.1. Disposizioni	»	266
3.1.2. Permutazioni	»	268
3.1.3. Combinazioni	»	269
3.2. Cenni di calcolo delle probabilità	»	277
3.3. Progressioni aritmetiche e geometriche	»	288
Verifica finale	»	296
Risposte esatta	»	299

LOGICA e GEOMETRIA

Capitolo 1: Logica dei predicati

Test di accertamento dei prerequisiti	»	310
1.1. Prime nozioni	»	312
1.1.1. Enunciati logici	»	312
1.1.2. La negazione	»	313
1.1.3. I quantificatori	»	313
1.1.4. Negazione dei quantificatori	»	315
1.2. I connettivi	»	319
1.3. Schemi deduttivi	»	325
Verifica finale	»	333
Risposte esatte	»	337

Capitolo 2: Geometria del piano

Test di accertamento dei prerequisiti	»	342
2.1. Enti fondamentali della geometria del piano	»	344
2.1.1. Rette e loro porzioni	»	344
2.1.2. Gli angoli	»	347
2.2. La circonferenza e il cerchio	»	356

2.3. I poligoni.....	Pag. 364
2.4. I triangoli.....	» 365
2.5. Alcuni quadrilateri.....	» 376
2.5.1. Il parallelogramma.....	» 376
2.5.2. Il trapezio.....	» 378
2.5.3. Quadrilateri inscritibili e circoscrivibili e poligoni regolari.....	» 379
2.6. Concetto di area.....	» 383
2.7. Similitudine.....	» 394
Verifica finale.....	» 404
Risposte esatte.....	» 407

Capitolo 3: Geometria dello spazio

Test di accertamento dei prerequisiti.....	» 416
3.1. Punti, rette e piani nello spazio.....	» 418
3.2. I poliedri.....	» 428
3.2.1. Alcuni poliedri.....	» 428
3.2.2. Poliedri regolari.....	» 435
3.3. I solidi di rotazione.....	» 442
3.4. Il concetto di volume.....	» 450
Verifica finale.....	» 456
Risposte esatte.....	» 460

GEOMETRIA ANALITICA

Capitolo 1: Punti e rette nel piano cartesiano

Test di accertamento dei prerequisiti.....	» 468
1.1. Il piano cartesiano.....	» 470
1.2. Equazione di una retta.....	» 484
Verifica finale.....	» 498
Risposte esatte.....	» 501

Capitolo 2: Le trasformazioni geometriche

Test di accertamento dei prerequisiti	Pag.	506
2.1. Le isometrie del piano	»	508
2.1.1. Traslazioni	»	510
2.1.2. Simmetrie	»	512
2.1.3. Rotazioni	»	518
2.2. Alcune trasformazioni non isometriche piane	»	524
2.2.1. Omotetie	»	524
2.2.2. Dilatazioni	»	525
Verifica finale	»	530
Risposte esatte	»	534

Capitolo 3: Coniche nel piano cartesiano

Test di accertamento dei prerequisiti	»	540
3.1. Le coniche	»	542
3.2. Equazione della circonferenza	»	546
3.3. Equazione dell'ellisse in forma canonica	»	556
3.4. Equazione dell'iperbole in forma canonica	»	570
3.5. Equazione della parabola in forma canonica	»	587
Verifica finale	»	602
Risposte esatte	»	605

GONIOMETRIA e TRIGONOMETRIA

Capitolo 1: Risoluzione dei triangoli

Test di accertamento dei prerequisiti	»	626
1.1. Funzioni goniometriche elementari e risoluzione di triangoli rettangoli	»	628
1.1.1. Funzioni goniometriche elementari	»	629
1.1.2. Risoluzione dei triangoli rettangoli	»	635
1.2. Risoluzione di triangoli qualsiasi	»	645
Verifica finale	»	662
Risposte esatte	»	666

Capitolo 2: Identità goniometriche fondamentali

Test di accertamento dei prerequisiti	Pag. 672
2.1. Archi notevoli e relazioni fra le corrispondenti funzioni goniometriche	» 674
2.2. Formule goniometriche.....	» 681
2.3. Applicazioni.....	» 699
2.3.1. Trigonometria ed equazione della retta	» 699
2.3.2. Equazioni parametriche di una curva	» 701
2.3.3. Riferimento polare.....	» 703
Verifica finale.....	» 708
Risposte esatte.....	» 713

Capitolo 3: Equazioni e disequazioni goniometriche

Test di accertamento dei prerequisiti	» 720
3.1. Sistema di misurazione in radianti e rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche	» 722
3.1.1. Le componenti di un vettore.....	» 725
3.1.2. Forma trigonometrica dei numeri complessi	» 726
3.2. Equazioni e disequazioni goniometriche.....	» 737
Verifica finale.....	» 751
Risposte esatte	» 756

Capitolo 1

Insiemistica

Prerequisiti

- Gli insiemi numerici di base
- Divisibilità e fattorizzazione nei numeri interi

Obiettivi

- Sapere utilizzare opportunamente le diverse rappresentazioni insiemistiche
- Sapere operare con gli insiemi
- Riconoscere insiemi finiti, infiniti e vuoti

Di seguito sono proposte alcune domande di varie tipologie, per stabilire la capacità personale di affrontare gli argomenti svolti in questo capitolo. Ogni tipologia ha un punteggio associato, per un totale massimo di 85 punti, se si ottiene un punteggio inferiore a 51 vuol dire che non si è raggiunta la sufficienza. Le risposte esatte sono riportate a fine capitolo.

Quesiti a scelta multipla con più risposte esatte

(1 punto per ogni risposta esatta, 1 punto di penalità per ogni risposta errata, 5 punti se si forniscono solo tutte le risposte esatte)

Per ogni quesito tracciare un segno nell'apposito quadratino sulle scelte corrette.

1 Quali fra i seguenti numeri sono multipli di 4 ma non di 8?

A 16

C 24

E 4

B 12

D 32

2 Quali fra le seguenti uguaglianze sono errate?

A $-3 - 2 \cdot (5 + 1) = -30$

B $-3 - 2 \cdot 5 + 1 = -24$

C $(-3 - 2) \cdot (5 + 1) = -30$

D $-3 - (2 \cdot 5 + 1) = -14$

E $-(3 - 2 \cdot 5 + 1) = -6$

3 Quali fra le seguenti frazioni sono ridotte ai minimi termini per qualsiasi numero naturale si sostituisce alla variabile n ?

A $\frac{n}{n+1}$

C $\frac{2n+1}{4n-1}$

E $\frac{2n}{2n+1}$

B $\frac{n-1}{n+1}$

D $\frac{n^2-1}{n+1}$

4 Quali fra le seguenti uguaglianze sono corrette?

A $3 \cdot (5+7) = 3 \cdot 5 + 7$

C $4 \cdot (2 \cdot 3) = (4 \cdot 2) \cdot 3$

E $(2 \cdot 3)^5 = 2 \cdot 3^5$

B $3 - (5+7) = 3 - 5 - 7$

D $\left(\frac{2+3}{3-2}\right)^2 = 5^2$

Quesiti a scelta multipla con una sola risposta esatta

(5 punti per ogni risposta esatta)

Per ogni quesito tracciare un segno nell'apposito quadratino sull'unica scelta corretta.

5 Giorgio ha deciso di sistemare i propri CD in contenitori. Sappiamo che riesce a sistemarli, senza che ne rimangano, in contenitori tutti da 7 o in contenitori tutti da 15 ma non riesce a sistemarli in contenitori da 10. Quanti possono essere i CD di Giorgio?

A 105

C 135

E Nessuna delle precedenti

B 120

D I dati sono incoerenti

6 Quale fra le seguenti frazioni rappresenta un numero periodico semplice?

A $\frac{1}{6}$ C $\frac{4}{30}$

E Nessuna delle precedenti

B $\frac{3}{25}$ D $\frac{2}{18}$

7 Se un numero è divisibile per 4 e per 6 allora è certamente divisibile anche per:

A 12

C 8

E 10

B 24

D 16

Quesiti a risposta numerica

(10 punti per ogni risposta esatta)

Rispondere con un numero alle seguenti domande.

8 Quanti numeri dispari sono maggiori di 75 e minori di 98?

9 Quanti numeri naturali minori di 75 sono multipli di 6 ma non di 7?

10 Quale numero naturale è reciproco di se stesso?

11 Il resto della divisione di un numero per 7 può essere al massimo uguale a:

12 La somma di due multipli di 5 è sicuramente un multiplo di:

1.1. Concetto di insieme

Chiamiamo insieme, e consideriamo tale ente come primitivo e quindi non lo definiamo, una raccolta di oggetti, di qualunque tipo essi siano (numeri, animali, persone, cose, ...).

Chiamiamo elementi gli oggetti che fanno parte dell'insieme e imponiamo che siano tutti diversi fra loro.

Per dire che un elemento a appartiene all'insieme A scriviamo $a \in A$.

Per dire che un elemento a non appartiene all'insieme A scriviamo $a \notin A$.

Esistono diverse modalità di rappresentazione di un insieme.

1.1.1. Rappresentazioni per elenco

Nella rappresentazione per elenco si scrivono per esteso gli elementi, trascurandone l'eventuale ordine naturale.

Non è possibile rappresentare mediante elenco insiemi infiniti e non è un modo conveniente per rappresentare insiemi con molti elementi. In alcuni casi possiamo rappresentare per elenco anche insiemi con molti elementi se essi verificano qualche proprietà facilmente riconoscibile.

Con la rappresentazione per elenco, l'insieme dei numeri naturali è $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, dei naturali con lo zero è $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, quello dei numeri interi è $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, quello dei razionali è

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in Z \wedge n \neq 0 \right\}$$

Inoltre, l'insieme dei numeri reali si indica con R , dei reali positivi con R^+ , dei reali negativi con R^- , dei reali non negativi R_0^+ e dei reali non positivi con R_0^- .

ESEMPIO

Possiamo indicare l'insieme dei primi 10.000 multipli di 3 nel seguente modo: $S = \{3, 6, 9, \dots, 29.997, 30.000\}$.

Rappresentare mediante elenco gli insiemi i cui elementi sono quelli di seguito descritti.

- 1 • I numeri dispari compresi tra 31 e 59.

L'insieme è finito, ma ha 14 elementi, non conviene scriverli per esteso tutti, ne scriviamo allora solo alcuni: {32, 34, 36, ..., 56, 58}.

- 2 • I numeri dispari maggiori di 27.

L'insieme è infinito, quindi non possiamo indicare tutti i suoi elementi, scriviamone i primi 5: {27, 29, 31, 33, 35, ...}.

- 3 • I numeri naturali multipli di 4 minori di 125.

Poiché $125 = 4 \cdot 31 + 1$, l'insieme ha 31 elementi, quelli che vanno da $4 \cdot 1 = 4$ a $4 \cdot 31 = 124$, scriviamo perciò:

$$\{4, 8, 12, 16, \dots, 120, 124\}.$$

- 4 • I numeri interi il cui quadrato è minore di 95.

Abbiamo sia numeri negativi che positivi, poiché $9^2 = 81$ e $10^2 = 100$, avremo il seguente insieme di 19 elementi: $\{-10, -9, \dots, 8, 9\}$.

- 5 • Le frazioni proprie (cioè con il numeratore minore del denominatore) ridotte ai minimi termini, il cui denominatore è 10.

Abbiamo frazioni del tipo $\frac{n}{10}$, con $1 < n < 10$, in modo che $\text{MCD}(n, 10) = 1$. cioè:

$$\left\{ \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10} \right\}$$

- 6 • Le frazioni proprie ridotte ai minimi termini con numeratore compreso tra 2 e 5 e denominatore compreso tra 3 e 6.

Avremo:

$$\left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6} \right\}$$

- 7 • I divisori del numero 12.

Un numero si dice divisore di un altro se esiste un terzo numero che moltiplicato per il secondo riproduce il primo. Pertanto avremo: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

8 • I numeri interi che sono sia quadrati sia cubi perfetti minori di 1.000.

Un numero è sia quadrato sia cubo perfetto se è la sesta potenza di qualche numero naturale. Poiché $n^6 < 1.000$ per $n < 4$, dato che $3^6 = 729$ e $4^6 = 4.096$, avremo:

$$\{0, 1, 2, 3\}$$

9 • I numeri primi maggiori di 40 e minori di 70.

Un numero primo, escluso 2, è dispari e non finisce per 5, quindi abbiamo da considerare solo i numeri dell'insieme $\{41, 43, 47, 49, 51, 53, 57, 59, 61, 63, 67, 69\}$, di questi però $49 = 7^2$, $51 = 3 \cdot 17$, $57, 63$ e 69 sono multipli di 3 (la somma delle loro cifre è divisibile per 3). L'insieme cercato è perciò:

$$\{41, 43, 47, 53, 59, 61, 67\}$$

10 • I numeri naturali di 3 cifre, scelti in modo che una di esse è doppia dell'altra che è a sua volta doppia della terza.

3 cifre in modo che ciascuna sia doppia dell'altra sono 1, 2, 4 oppure 2,4,8, non vi sono altre possibilità. Ovviamente possiamo ordinare le cifre anche in modi diversi ottenendo perciò:

$$\{124, 142, 214, 241, 412, 421, 248, 284, 428, 482, 824, 842\}$$

1 Insiemistica

Esercizi proposti | 312

Le risposte esatte sono riportate a fine capitolo.

Rappresentare mediante elenco gli insiemi i cui elementi sono quelli di seguito descritti.

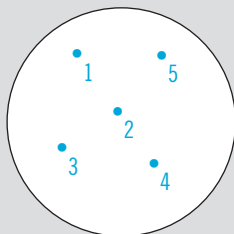
- 1 • I numeri pari compresi tra 13 e 31.
- 2 • I multipli di 5 minori di 72.
- 3 • I numeri naturali minori di 50 le cui cifre hanno somma uguale a 5.
- 4 • I numeri naturali di 2 cifre la cui cifra delle unità è doppia di quella delle decine.
- 5 • I numeri naturali multipli di 18.
- 6 • I numeri interi di 3 cifre multipli di 5, in cui la cifra delle centinaia è uguale a quella delle decine.
- 7 • I numeri naturali multipli di 3 compresi tra 85 e 102, il prodotto delle cui cifre è maggiore di 20.
- 8 • I numeri naturali compresi tra 51 e 88, multipli di 3, la somma delle cui cifre è maggiore di 8.
- 9 • Le frazioni proprie in cui la somma di numeratore e denominatore è uguale a 8.
- 10 • I numeri naturali che forniscono cubi perfetti minori di 512.

1.1.2. Rappresentazioni per diagrammi

Possiamo anche rappresentare gli elementi all'interno di una linea chiusa, di solito un cerchio, ottenendo la cosiddetta rappresentazione mediante diagrammi di Eulero–Venn.

ESEMPIO

L'insieme dei primi 5 numeri naturali si può indicare nel seguente modo.



1.1.3. Rappresentazioni per proprietà caratteristica

Infine, possiamo indicare gli insiemi mediante una proprietà che li caratterizza.

ESEMPIO

L'insieme dei primi 50.000 numeri naturali si può indicare simbolicamente nel seguente modo:

$$A = \{a \in \mathbb{N} : 1 \leq a \leq 50.000\}$$

1

Insiemistica

Esercizi svolti | 1 2 3

Scrivere in forma simbolica gli insiemi seguenti.

- 1 • I numeri pari compresi tra 54 e 845.

Un numero pari è divisibile per 2, pertanto simbolicamente si scrive $2n$, in cui n rappresenta un generico numero naturale. Inoltre $54 = 2 \cdot 27$ e $844 = 2 \cdot 422$. Quindi possiamo scrivere: $\{2n : n \in \mathbb{N} \wedge 27 \leq n \leq 422\}$, in cui il simbolo \wedge corrisponde alla congiunzione e.

- 2 • I numeri dispari maggiori di 58.

Un numero dispari è o il precedente o il successivo di un numero pari, pertanto si può indicare con uno dei simboli seguenti: $2n - 1$ oppure $2n + 1$. Dato che $59 = 2 \cdot 29 + 1$ oppure $2 \cdot 30 - 1$, avremo: $\{2n - 1 : n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 30\}$ oppure $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 29\}$.

3 • I numeri naturali multipli di 7 minori di 212.

Un multiplo di 7 si indica ovviamente con il simbolo $7n$, inoltre il più grande multiplo di 7 minore di 212 è $210 = 7 \cdot 30$. Quindi avremo: $\{7n: n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 30\}$.

4 • I numeri interi il cui quadrato è maggiore di 1.245.

Abbiamo $\{n \in \mathbb{N}: n^2 > 1.245\}$.

5 • Le frazioni in cui il numeratore è uguale a 3 e il denominatore è compreso tra 5 e 12.

Una generica frazione con numeratore 3 si indica con $\frac{3}{n}$, pertanto avremo: $\left\{\frac{3}{n}: n \in \mathbb{N}, 5 \leq n \leq 12\right\}$.

6 • Le frazioni in cui numeratore e denominatore hanno somma uguale a 14.

Avremo: $\left\{\frac{n}{m}: n, m \in \mathbb{N}, n + m = 14\right\}$.

7 • I divisori del numero 30.

Ricordiamo il significato di divisore e scriviamo: $\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{30}{n} \in \mathbb{N}\right\}$.

8 • I numeri interi minori di 7.485 che sono quadrati perfetti.

Un numero è un quadrato perfetto se la sua radice quadrata è un numero naturale. Perciò abbiamo: $\{n \in \mathbb{N}: \sqrt{n} \in \mathbb{N} \wedge n < 7.485\}$.

9 • I numeri che divisi per 6 hanno resto uguale a 4 e sono compresi tra 57 e 123.

Se un numero diviso per 6 ha resto uguale a 4, vuol dire che si può scrivere $6n + 4$. Il più piccolo fra quelli cercati è $58 = 6 \cdot 9 + 4$ e il più grande è $118 = 6 \cdot 19 + 4$. Abbiamo perciò $\{6n + 4: n \in \mathbb{N} \wedge 9 \leq n \leq 19\}$.

10 • I numeri naturali di 2 cifre, in cui la cifra delle unità è tripla di quella delle decine.

Un numero di 2 cifre, come per esempio 73 si può scrivere esplicitando la sua notazione decimale nel modo seguente: $70 + 3 = 7 \cdot 10 + 3$. Quindi un generico numero di due cifre ab si scrive $10a + b$. Abbiamo $\{n = 10a + b: a, b \in \mathbb{N} \wedge a = 3 \cdot b \wedge 1 \leq b \leq 3\}$, l'ultima condizione su b serve a fare in modo che a e b siano cifre, infatti se per esempio fosse $b = 4$ avremmo $a = 12$ che non è una cifra.

Enunciare la proprietà caratteristica degli insiemi seguenti espressi in forma simbolica.

11 • $\{2n: n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 17\}$

Dato che i numeri sono di tipo $2n$, sono numeri pari, compresi tra $2 \cdot 1 = 2$ e $2 \cdot 17 = 34$. Quindi abbiamo l'insieme dei numeri pari minori o uguali a 32, o se si preferisce minori di 33 o di 34.

$$12 \bullet \{b \in \mathbb{Z} : b^2 > 53\}$$

È l'insieme dei numeri interi il cui quadrato è maggiore di 53.

$$13 \bullet \left\{ \frac{3}{2 \cdot n} : n \in \mathbb{N} \wedge 4 \leq n \leq 8 \right\}$$

Sono le frazioni con numeratore uguale a 3 e denominatore un numero pari compreso tra 8 e 16.

$$14 \bullet \{n \in \mathbb{N} : n = 100a + 10a + a, a \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq a \leq 9\}$$

Sono i numeri di 3 cifre tutte uguali fra loro.

$$15 \bullet \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq n \leq 9 \right\}$$

Sono le frazioni il cui numeratore è successivo del denominatore, per tutti i numeri naturali da 3 a 9.

$$16 \bullet \left\{ \frac{n^2}{m^3} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Sono le frazioni il cui numeratore è un quadrato perfetto e il denominatore un cubo perfetto.

$$17 \bullet \left\{ \frac{3n}{5m} : n, m \in \mathbb{N} \wedge 2 < n < 8 \wedge 4 < m < 11 \right\}$$

Sono le frazioni il cui numeratore è multiplo di 3 compreso tra 9 e 21 e il denominatore un multiplo di 5 compreso tra 25 e 50.

$$18 \bullet \left\{ \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} : a \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sono le frazioni il cui numeratore è il successivo di un quadrato perfetto e il denominatore il precedente dello stesso quadrato.

$$19 \bullet \{n \in \mathbb{N} : n = 1 + 2 + \dots + h \wedge h \in \mathbb{N} \wedge 10 \leq h \leq 14\}$$

Sono i numeri che si ottengono sommando fra loro da 10 a 14 numeri naturali consecutivi.

$$20 \bullet \{n \in \mathbb{N} : \text{MCD}(n, 5) = 1\}$$

Poiché il massimo comune divisore fra n e 5 è 1, vuol dire che n non è divisibile per 5.

Le risposte esatte sono riportate a fine capitolo.

Scrivere in forma simbolica gli insiemi seguenti

- 1 • I numeri pari compresi tra 74 e 145.
- 2 • I multipli di 11 minori di 1.247.
- 3 • I numeri naturali minori di 50 le cui cifre hanno somma uguale a 7.
- 4 • I numeri naturali di 2 cifre la cui cifra delle unità è tripla di quella delle decine.
- 5 • I numeri naturali multipli di 18 ma non di 5.
- 6 • I numeri interi di 3 cifre multipli di 5, in cui la cifra delle centinaia è uguale a quella delle decine.
- 7 • I numeri naturali multipli di 3 compresi tra 85 e 102 e il prodotto delle cui cifre è maggiore di 20.
- 8 • I numeri naturali che divisi per 5 danno resto 2 e divisi per 7 danno resto 3.
- 9 • Le frazioni proprie in cui la somma di numeratore e denominatore è uguale a 8.
- 10 • I numeri naturali minori di 512 che sono cubi perfetti.

Enunciare la proprietà caratteristica degli insiemi seguenti espressi in forma simbolica

- 11 • $\{a \in \mathbb{N} : 48 \leq a \leq 75\}$
- 12 • $\{3n : n \in \mathbb{N} \wedge 12 \leq n \leq 24\}$
- 13 • $\{n^2 : n \in \mathbb{N} \wedge 5 \leq n < 14\}$
- 14 • $\{2^n : n \in \mathbb{N} \wedge 4 \leq n \leq 12\}$
- 15 • $\left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \wedge 8 \leq n \leq 13 \right\}$
- 16 • $\left\{ \frac{4n}{2m+1} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$
- 17 • $\{n^3 - 1 : n \in \mathbb{N} \wedge 4 \leq n \leq 11\}$
- 18 • $\{3n+2 : n \in \mathbb{N} \wedge 4 \leq n \leq 18\}$
- 19 • $\left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N} \wedge \text{MCD}(n, 3) = \text{MCD}(m, 6) = 1 \right\}$
- 20 • $\{n \in \mathbb{N} : n = 10a + b \wedge 10 \leq n \leq 99 \wedge a \cdot b = 12\}$

1.2. Operazione insiemistiche

Ovviamente molto importanti sono le operazioni tra insiemi.

1.2.1. Operazione di intersezione

Diciamo **intersezione** di due o più insiemi l'insieme formato dagli elementi a essi comuni.

Indichiamo l'intersezione di A con B nel seguente modo: $A \cap B$.

ESEMPIO

L'intersezione fra l'insieme dei multipli di 4, $\{4, 8, 12, \dots\}$, e l'insieme dei multipli di 6, $\{6, 12, 18, \dots\}$, è ovviamente l'insieme dei multipli di 4 e 6 contemporaneamente, cioè l'insieme dei multipli del loro minimo comune multiplo, ossia 12, $\{12, 24, 36, \dots\}$.



Ovviamente può capitare che due insiemi non abbiano elementi in comune, come accade per esempio per l'insieme dei numeri pari e quello dei numeri dispari.

Diremo che l'intersezione di due insiemi A e B privi di elementi è l'**insieme vuoto**. A e B si dicono fra loro **disgiunti**.

L'insieme vuoto si indica con uno dei seguenti simboli: $\{\}$, \emptyset .

L'insieme vuoto è anche un insieme per cui non esistono elementi che verificano una data proprietà caratteristica.

ESEMPIO

L'insieme delle soluzioni reali dell'equazione $x^2 + 3 = 0$ è ovviamente vuoto.

Nei seguenti esercizi vogliamo determinare $A \cap B$.

1 • $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$.

L'unico elemento comune è $\{1\}$.

2 • $A = \{\text{Multipli di } 3\}$, $B = \{\text{Multipli di } 4\}$.

Un numero multiplo sia di 3 sia di 4 è multiplo del loro mcm, cioè di 12.

3 • $A = \{\text{Multipli di } 4\}$, $B = \{\text{Multipli di } 2\}$.

In questo caso ogni multiplo di 4 è anche multiplo di 2, quindi l'intersezione è data proprio dai multipli di 4.

4 • $A = \{2k+1: k \in \mathbb{N} \wedge 1 < k < 8\}$, $B = \{2k+1: k \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq k \leq 10\}$.

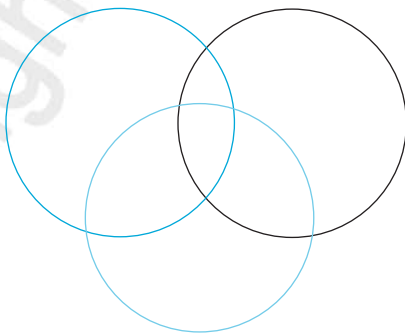
Abbiamo i numeri dispari compresi tra 5 e 15 e i numeri dispari compresi tra 7 e 21, l'intersezione è ovviamente $A \cap B = \{2k+1: k \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq k \leq 7\}$, cioè i dispari compresi tra 7 e 15.

5 • $A = \{3n+2: n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 10\}$, $B = \{5n+4: n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 10\}$.

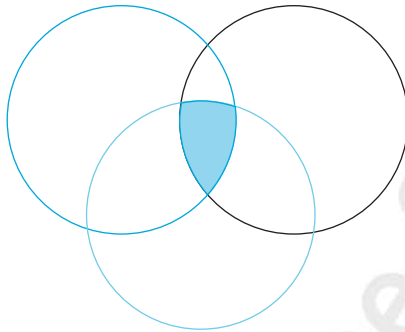
Conviene esprimere i due insiemi in forma di elenco. Abbiamo perciò: $A = \{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32\}$, $B = \{9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54\}$.

Pertanto l'intersezione cercata è $A \cap B = \{14, 29\}$.

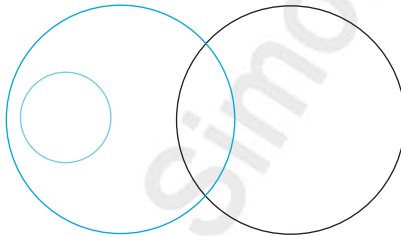
6 • Determinare graficamente l'intersezione dei tre insiemi.



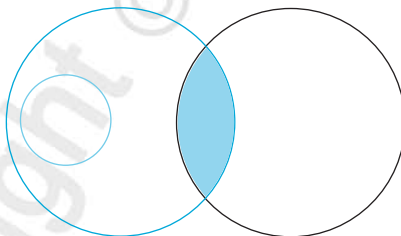
La parte comune è ovviamente quella mostrata:



7 • Determinare graficamente l'intersezione dei tre insiemi seguenti:



Si ha:



8 • Se A ha 12 elementi e B ne ha 8, cosa possiamo dire degli elementi della loro intersezione?

A e B possono non avere elementi in comune, oppure tutti gli elementi di uno dei due, ovviamente di B che ha meno elementi, fanno parte di A e perciò l'intersezione ha 8 elementi. In generale $A \cap B$ ha da 0 a 8 elementi.

- 9 • L'insieme $A = \{a \in \mathbb{N} : 14 < a < 15\}$ è vuoto?

Non ci sono numeri naturali maggiori di 14 e minori di 15, pertanto A è vuoto.

- 10 • L'insieme $A = \{a \in \mathbb{Q} : 71 < a < 72\}$ è vuoto?

Stavolta di numeri razionali compresi tra 71 e 72 ce ne sono addirittura infiniti, per esempio 71,2; 71,034; 71,99765; ... quindi l'insieme non è vuoto.



Insiemistica

Esercizi proposti | 312

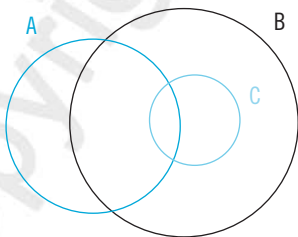
Le risposte esatte sono riportate a fine capitolo.

Nei seguenti esercizi determinare $A \cap B$.

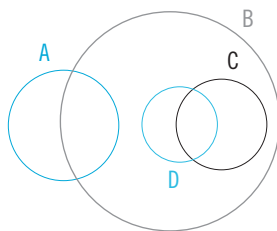
- $A = \{2, 5, 7, 8, 12, 15\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 13\}$
- $A = \{\text{Numeri pari compresi tra 1 e 32}\}$, $B = \{\text{Multipli di 3 compresi tra 4 e 41}\}$.
- $A = \{\text{Multipli di 6}\}$, $B = \{\text{Multipli di 10}\}$.
- $A = \{\text{Multipli di 12}\}$, $B = \{\text{Multipli di 24}\}$.
- $A = \{\text{Divisori di 20}\}$, $B = \{\text{Divisori di 36}\}$.
- $A = \{\text{Numeri primi compresi tra 10 e 40}\}$, $B = \{\text{Numeri dispari fra 8 e 51}\}$.
- $A = \{3k+1 : k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq 8\}$, $B = \{4k-1 : k \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq k \leq 10\}$.
- $A = \{k^2 - k + 1 : k \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq k \leq 10\}$, $B = \{\text{Numeri primi minori di 70}\}$.

Determinare graficamente le intersezioni richieste

- $A \cap B; B \cap C; A \cap B \cap C$.
- $A \cap B; B \cap C \cap D; A \cap B \cap D$.



Esercizio 9



Esercizio 10