Adolfo Russo - Vito Trimarco

puntoexe

L'esame di Analisi Matematica

Equazioni differenziali

Esercizi svolti e commentati

- Equazioni e sistemi di equazioni differenziali
- Problemi di Cauchy
- Problema di Sturm-Liouville
- Risoluzione numerica di equazioni differenziali (con listati Matlab)
- Applicazioni delle equazioni differenziali alla Fisica e ad altri ambiti utili agli studenti di Ingegneria

CD-Rom con:
Guida a Matlab
Software per il calcolo scientifico
Guida alle risorse internet per gli studenti

sistemi editoriali Se
Gruppo Editoriale Esselibri - Simone

Via F. Russo, 33/D
80123 Napoli

Azienda con sistema qualità certificato ISO 14001: 2003

Prima edizione: settembre 2005
Pt8 - Equazioni differenziali
ISBN 88-513-0298-7

Ristampe
8 7 6 5 4 3 2 1 2005 2006 2007 2008

Questo volume è stato stampato presso:
Officina Grafica Iride
Via Prov.le Arzano-Casandrino, VII Trav., 24 - Arzano (NA)

Della stessa collana:

Pt1 Limiti, continuità, calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale
Pt2 Studio di funzioni
Pt3 Integrali di funzioni di una variabile reale
Pt4 Serie numeriche
Pt5 Successioni e serie di funzioni
Pt6 Limiti, continuità, calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali
Pt7 Integrali di funzioni di due o più variabili reali

sistemi editoriali Se

Professionisti, tecnici e imprese
Gruppo Editoriale Esselibri - Simone

I capitoli 1, 3, 5, 8 sono di Adolfo Russo
I capitoli 2, 4, 6, 7 sono di Vito Trimarco

Coordinamento redazionale: Carla Iodice, Stefano Minieri

Impaginazione: Grafica 3

Prefazione

La risoluzione di un'equazione differenziale rappresenta uno dei metodi fondamentali per la trattazione di gran parte dei problemi scientifici, dalla fisica alla biologia, dalla statistica all'ingegneria. Per questo motivo nei corsi di base delle facoltà scientifiche viene sempre dedicato notevole spazio all'approfondimento di tale argomento, talvolta senza però fare cenno alle possibili applicazioni.
Il testo si compone di otto capitoli nei quali si affrontano le questioni relative alla risoluzione di svariati tipi di equazioni differenziali, e la possibilità di risolverle al calcolatore. In particolare, il settimo capitolo riporta **listati implementati in ambiente Matlab®**; inoltre, nell'ottavo capitolo, non meno importante, vengono presentate alcune applicazioni delle equazioni differenziali a problemi di fisica e ad altri ambiti (utili, in particolare, agli studenti di Ingegneria).
Questo libro di esercizi è nato da una collaborazione non sempre facile, in quanto entrambi avevamo a cuore la realizzazione di un riferimento che fosse al tempo stesso chiaro nella parte teorica ed efficace nella parte esercitativa, e che potesse dare spunto per ulteriori approfondimenti e fornire un'idea dei metodi numerici di risoluzione che sempre più sono venuti alla ribalta negli ultimi anni con lo sviluppo delle tecnologie. In molti casi le discussioni sono sfociate in animosi litigi (fortunatamente nessuno si è fatto male!), tuttavia hanno contribuito in maniera decisiva alla buona riuscita del lavoro che, con un pizzico di presunzione, forse giustificata, riteniamo valido per la preparazione di una prova d'esame.
Ringraziamo la redazione (le cui persone si sono dimostrate sempre gentili, professionali e soprattutto amiche), il nostro amico Giovanni Ciotola per la stima dimostrata nei nostri riguardi e il prof. Luigi Avellino per gli utili consigli che ci ha fornito. Infine, ci auguriamo che i nostri sforzi (...a fronte del vostro impegno!) vi permettano di superare in maniera brillante la prova scritta d'esame che vi accingete ad affrontare.

Adolfo Russo, Vito Trimarco

Indice dei simboli

$>$	*maggiore*
$<$	*minore*
$\geq$	*maggiore o uguale*
$\leq$	*minore o uguale*
$\neq$	*diverso da*
$\pm$	*più o meno*
∞	*infinito*
$\to$	*tende a*
$\forall$	*per ogni*
$\in$	*appartiene*
$\notin$	*non appartiene*
$\cup$	*unione tra insiemi*
$\cap$	*intersezione tra insiemi*
$\subset$	*sottoinsieme proprio*
$\subseteq$	*sottoinsieme*
$\not\subset$	*non è sottoinsieme*
$\Rightarrow$	*implicazione*
$\Leftrightarrow$	*doppia implicazione*
$\mathbb{N}$	*insieme dei numeri naturali*
$\mathbb{R}$	*insieme dei numeri reali*
$\log(\ )$	*logaritmo neperiano*
e	*numero di Nepero*
$\lim$	*limite*
$\left.\begin{matrix} f'(x) \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x} \\ y' \end{matrix}\right\}$	*derivata*
$\int$	*integrale*
$\sum$	*sommatoria*

■ 1 Equazioni differenziali del primo ordine

1.1 Introduzione alle equazioni differenziali

Sia y una funzione incognita della variabile x, siano $y', y'',\dots, y^{(n)}$ le sue prime n derivate; si dice **equazione differenziale ordinaria di ordine *n*** una relazione del tipo:

$$F\left(x, y, y', y'',\dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1.1}$$

Ogni funzione $y = f(x)$ che soddisfa l'equazione differenziale (1.1.1), cioè per la quale:

$$F\left(x, f(x), f'(x), f''(x),\dots, f^{(n)}(x)\right) = 0 \tag{1.1.2}$$

si dice **soluzione** o **integrale** dell'equazione stessa.

Si parla di equazione differenziale ordinaria per distinguerla da un'equazione differenziale alle derivate parziali, quale può essere l'**equazione di Laplace** (l'operatore differenziale ∇^2 prende il nome di **laplaciano**):

$$\nabla^2 u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

nella quale compaiono derivate parziali della funzione incognita.

Mentre un'equazione algebrica o trascendente ha soluzioni interpretabili da un punto di vista geometrico come punti, un'equazione differenziale ha per soluzione una funzione il cui diagramma si dice **curva integrale**.

La risoluzione di un'equazione differenziale comporta la determinazione di tutte le sue soluzioni, che sono infinite. Tali soluzioni dipendono da un numero di costanti arbitrarie dipendenti dall'ordine dell'equazione differenziale, e sono rappresentate da un'equazione del tipo:

$$y = f(x, c_1, c_2,\dots, c_n) \tag{1.1.3}$$

dove $c_1, c_2,\dots, c_n$ sono costanti arbitrarie.

Faremo nel seguito riferimento ai più importanti tipi di equazioni differenziali, ai relativi metodi di soluzione, e alla loro utilizzazione nella soluzione di semplici problemi di fisica.

Un'equazione differenziale si dice in forma **normale** se è risolta rispetto alla derivata di ordine massimo, ovvero se è della forma:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y',\dots, y^{(n-1)}\right) \tag{1.1.4}$$

D'ora in poi considereremo equazioni in forma normale. La possibilità di porre un'equazione differenziale ordinaria generale in forma normale è un problema ben diverso da quello della risoluzione dell'equazione, e rientra nell'ambito della teoria delle *funzioni implicite.*

1.2 Equazioni differenziali del primo ordine

La più semplice equazione differenziale in forma normale è l'**equazione differenziale del primo ordine** del tipo:

$$y' = f(x) \tag{1.2.1}$$

Il **teorema fondamentale del calcolo integrale** assicura l'esistenza della soluzione:

$$y = F(x) + c \tag{1.2.2}$$

dove F è una primitiva di f, ovvero:

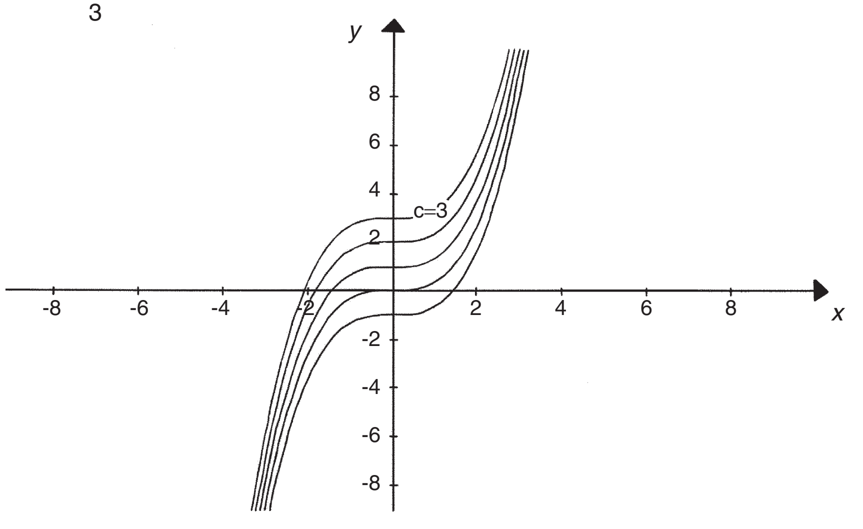
$$F(x) = \int f(x)\,dx \tag{1.2.3}$$

essendo $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo di definizione.

ESEMPIO

$$y' = x^2$$

$$y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$



Esaminiamo le più semplici equazioni del primo ordine.

1.3 Equazioni a variabili separabili

Si dicono **equazioni a variabili separabili** quelle riconducibili alla forma:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad g(y) \neq 0 \quad \forall y \tag{1.3.1}$$

da cui:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \tag{1.3.2}$$

e separando le variabili:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \tag{1.3.3}$$

Integrando la (1.3.3) si ha:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + c \tag{1.3.4}$$

e quindi:

$$G(y) = F(x) + c \tag{1.3.5}$$

essendo $G(y)$ e $F(x)$ primitive rispettivamente di $\dfrac{1}{g(y)}$ e $f(x)$.

Trovata, in tal modo, la soluzione generale si deve esaminare se non si sono tacitamente esclusi degli integrali particolari nelle operazioni che portano alla separazione delle variabili.

ESEMPIO

Risolvere l'equazione:

$$y'(x-1) - y + 2 = 0$$

Si ha:

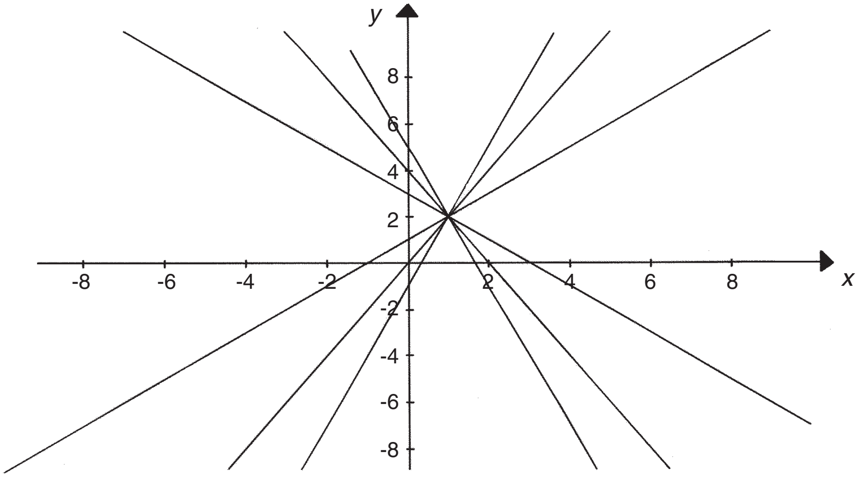
$$\frac{dy}{dx}(x-1) - (y-2) = 0 \quad \text{da cui} \quad \frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{x-1}$$

integrando:

$$\int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{x-1} + c \Rightarrow \log(y-2) = \log(x-1) + c$$

quindi:

$$\log\left(\frac{y-2}{x-1}\right) = \log e^{c} = \log k \Rightarrow y = k(x-1) + 2$$



1.4 Equazioni omogenee

Si dice **omogenea** un'equazione differenziale esprimibile nella forma:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.4.1}$$

Per risolvere questo tipo di equazione si pone $z = \frac{y}{x}$ e quindi $y = z \cdot x$; derivando quest'ultima espressione rispetto a x si ha:

$$y' = z'\,x + z \tag{1.4.2}$$

che sostituita nella (1.4.1) fornisce:

$$z'\,x + z = f(z) \tag{1.4.3}$$

e quindi $z' = \frac{f(z) - z}{x}$ che è ancora un'equazione a variabili separabili; perciò la soluzione è:

$$x = ke^{\int \frac{dz}{f(z)-z}} \tag{1.4.4}$$

avendo posto $k = e^{-c}$, dove c è una costante arbitraria.

1.5 Equazioni del primo ordine lineari

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice **lineare** quando è di primo grado rispetto alla funzione incognita y e alla sua derivata prima y'. Essa potrà scriversi nella forma:

$$y' + f(x)\,y = g(x) \tag{1.5.1}$$

La soluzione di quest'equazione è data dalla formula:

$$y = z(x)e^{-\int f(x)dx} = e^{-\int f(x)dx}\left[\int g(x)e^{\int f(x)dx}\,dx + c\right] \tag{1.5.2}$$

ed è ricavabile col metodo della variazione delle costanti di Lagrange. Il fattore $e^{-\int f(x)dx}$ è detto **fattore integrante**.

METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI

$$y' + f(x)\,y = g(x) \tag{1.5.3}$$

Cominciamo col supporre $g(x) = 0$. In tal caso si ha $y' + f(x)\,y = 0$ che è un'equazione a variabili separabili con soluzione:

$$y = ce^{-\int f(x)dx} \tag{1.5.4}$$

Per trovare una soluzione dell'equazione (1.5.3) applichiamo il metodo detto della **variazione delle costanti**, supponiamo cioè che nella (1.5.4) c sia variabile in funzione di x e sostituiamo nella (1.5.3) la (1.5.4) e la sua derivata prima, per vedere se è possibile determinare c in modo che la (1.5.3) sia soddisfatta. Essendo per la (1.5.3) $y' = [c'(x) - f(x)\,c(x)]e^{-\int f(x)dx}$ si ha, effettuando la sostituzione, $c' - c \cdot f = -c \cdot f + g \cdot e^{-\int f(x)dx}$ e quindi separando le variabili c e x e integrando: $c = \int g\,(x)e^{-\int f(x)dx}\,dx$ da cui segue la (1.5.2).

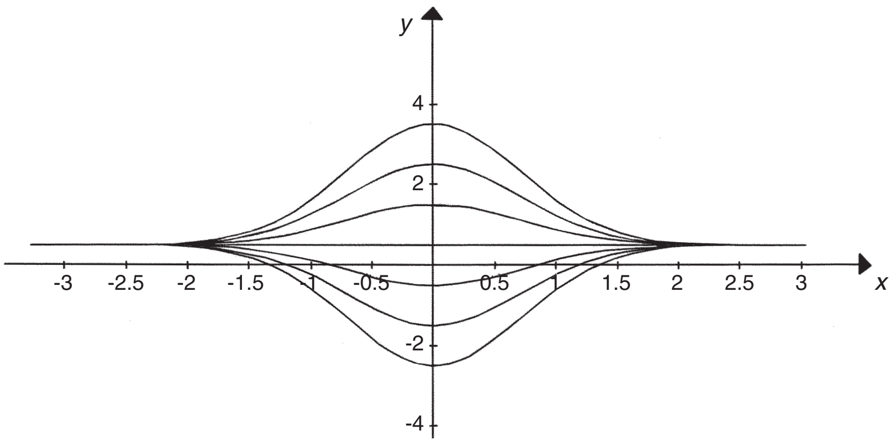
ESEMPIO

Risolvere la seguente equazione:

$$y' + 2xy = x$$

Poiché è $f(x) = 2x$ e $g(x) = x$, applicando la (1.5.2) si ottiene:

$$y = e^{-\int 2x dx}\left[\int e^{\int 2x dx} x dx + k\right] \Rightarrow y = e^{-x^2}\left[\int e^{x^2} x dx + k\right] \Rightarrow y = e^{-x^2}\left[\frac{1}{2}e^{x^2} + k\right] \Rightarrow y = ke^{-x^2} + \frac{1}{2}$$



1.6 Equazione di Bernoulli

Un'equazione del tipo:

$$y' = A(x)\,y + B(x)\,y^n \tag{1.6.1}$$

è detta **equazione di Bernoulli**, ed è riconducibile ad un'equazione lineare. Dividendo la (1.6.1) per y^n, ed effettuando il cambio di variabile:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y^{n-1}} = u \\ \dfrac{1-n}{y^n} dy = du \end{cases}$$

si ottiene:

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx} = A(x)u + B(x) \tag{1.6.2}$$

che è un'equazione lineare.

Esempio

Risolvere la seguente equazione:

$$xy' = -y^2 \log x - 2y$$

dividendo per x si ottiene:

$$y' = -2\frac{y}{x} - y^2 \frac{\log x}{x}$$

Dalla (1.6.2) si ha che:

$$n = 2, \qquad A(x) = \frac{1}{x}, \quad B(x) = \frac{\log x}{x}$$

$A(x)$ è definita in $\mathbb{R} - \{0\}$, e continua in $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$; $B(x)$ è definita in $[0, +\infty[$ e continua nell'intervallo. Quindi, le soluzioni vanno cercate in $]0, +\infty[$. Escludendo la soluzione identicamente nulla si ottiene:

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{2}{x}\frac{1}{y} - \frac{\log x}{x}$$

posto $z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{1}{y^2}y'$, l'equazione diventa:

$$z' = \frac{2}{x}z + \frac{\log x}{x}$$

Esprimiamo la soluzione come somma della soluzione dell'omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione. Pertanto consideriamo l'equazione omogenea associata:

$$z' = \frac{2}{x}z$$

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili, per cui integrando ambo i membri si ottiene:

$$\int \frac{z'(x)}{z(x)}dx = 2\int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \log|z(x)| = 2\log|x| + c \Rightarrow z(x) = cx^2$$

(Integrale generale dell'omogenea associata)

Passiamo ora alla determinazione di una soluzione particolare dell'equazione completa. Supponiamo di voler trovare una soluzione particolare del tipo:

$$u(x) = \gamma(x)\, x^2$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene:

$$\gamma' x^2 + 2x\gamma = \frac{2}{x}\gamma\, x^2 + \frac{\log x}{x} \Rightarrow \gamma' = \frac{\log x}{x^3} \Rightarrow \gamma(x) = -\frac{\log x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$$

per cui:

$$u(x) = x^2\left(-\frac{\log x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}\right)$$

L'integrale generale della completa è:

$$z(x) = cx^2 - \frac{\log x}{2} - \frac{1}{4} \tag{1.6.3}$$

Dalla relazione precedente si ricava: $y(x) = \left(cx^2 - \frac{\log x}{2} - \frac{1}{4} \right)^{-1}$. Ora dobbiamo determinare c in modo che $y(x)$ risulti definita in $]0, +\infty[$ ossia osservando la (1.6.3), $z(x) > 0$. Condizione necessaria affinché ciò accada è che sia $c > 0$. Per determinare la condizione sufficiente studiamo la funzione (1.6.3) nel caso $c > 0$:

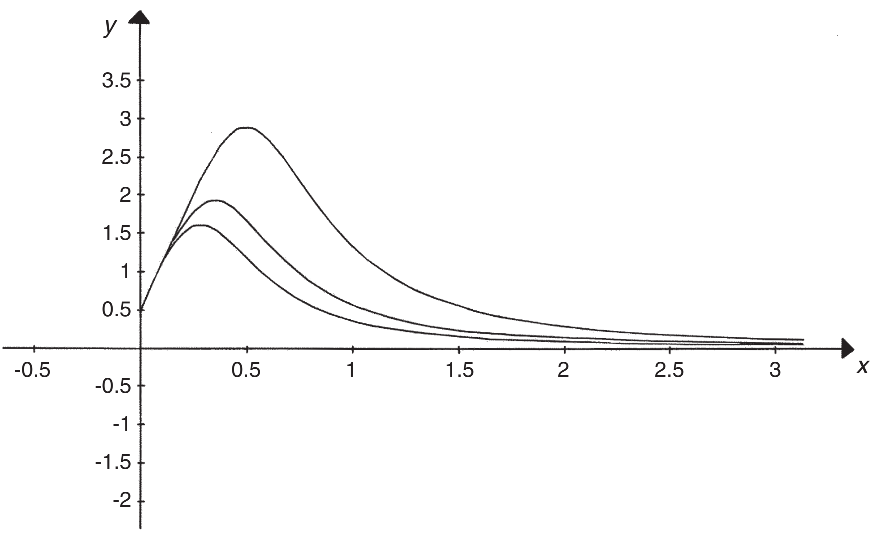
$$z'(x) = 2cx - \frac{1}{2x} = 0 \Rightarrow \frac{4cx^2 - 1}{2x} = 0 \Rightarrow 4cx^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4c}$$

L'unico punto di minimo accettabile è $x_0 = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ nel quale deve essere $z(x_0) > 0$. Quindi:

$$z(x_0) = \frac{\log\left(2\sqrt{c}\right)}{2} > 0 \Rightarrow \log\left(2\sqrt{c}\right) > 0 \Rightarrow 2\sqrt{c} > 1 \Rightarrow c > \frac{1}{4}$$

Quindi, la soluzione è:

✌ $$y(x) = \left(cx^2 - \frac{\log x}{2} - \frac{1}{4} \right)^{-1} \quad \forall c > \frac{1}{4} \text{ e } \forall x \in]0, +\infty[$$



1.7 Equazione di Clairaut

$$y = xy' + g(y') \tag{1.7.1}$$

Si tratta di un'equazione non in forma normale, citata per completezza, di cui si riporta un esempio.

ESEMPIO

Risolvere la seguente equazione:

$$y = xy' - \frac{1}{3}(y')^3 \tag{1.7.2}$$

Poniamo la (1.7.2) nella forma $F(x, y, y') = y - y'x + \frac{1}{3}(y')^3 = 0$. Derivando rispetto a *x*:

$$y' = y' + xy'' - (y')^2 y'' \Rightarrow y''\left[x - (y')^2\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} y'' = 0 \\ x - (y')^2 = 0 \end{cases}$$

$$y''(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = c \Rightarrow y(x) = cx + c_1$$

Imponiamo che la $y(x)$ sia soluzione della (1.7.2)

$$cx + c_1 = xc - \frac{1}{3}c^3 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{3}c^3$$

quindi la soluzione è:

✌ $$y(x) = cx - \frac{1}{3}c^3$$

Questo è l'integrale generale, tuttavia ci sono degli integrali particolari che si ricavano imponendo $x = t^2$ dove $t = y'$.

✌ $$\begin{cases} x = t^2 \\ y = xt - \frac{1}{3}t^3 = \frac{2}{3}t^3 \end{cases}$$

1.8 Esercizi proposti

1.8.1 Equazioni a variabili separabili

Esercizio n. 1.8.1.1

$$y' = t\left(1 + y^2\right)$$

Dividendo per $1 + y^2$ si ha:

$$\frac{y'}{1 + y^2} = t$$

da cui integrando:

✌ $$\frac{t^2}{2} + c = \arctan y \Rightarrow y(t) = \tan\left(\frac{t^2}{2} + c\right)$$

Esercizio n. 1.8.1.2

$$y' = t \cdot y$$

✌ $$\frac{y'}{y} = t \Rightarrow \log y = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow y = ce^{\frac{t^2}{2}}$$

Esercizio n. 1.8.1.3

$$y' = \sqrt{y-1}$$

Dividendo per $\sqrt{y-1}$ si ha:

$$\frac{dy}{dx}\frac{1}{\sqrt{y-1}} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \int dx \Rightarrow 2\sqrt{y-1} = x + c$$

Nella separazione delle variabili si è escluso l'integrale singolare $y=1$.

Esercizio n. 1.8.1.4

$$y' = y \tan t$$

$$\frac{y'}{y} = \tan t \Rightarrow \log y = -\log|\cos t| + k = -\log|\cos t| + \log c$$
$$\Rightarrow y = \frac{c}{\cos t}$$

Esercizio n. 1.8.1.5

$$y' = \frac{3x^2 - 2x + 1}{2y-1}$$

$$(2y-1)\,dy = \left(3x^2 - 2x + 1\right)dx \Rightarrow \int (2y-1)\,dy = \int \left(3x^2 - 2x + 1\right)dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2 - y = x^3 - x^2 + x + c$$

Esercizio n. 1.8.1.6

$$x^2 y' + \sqrt{y} = y' + y$$

$$y'\left(x^2 - 1\right) = y - \sqrt{y} \Rightarrow \int \frac{dy}{y - \sqrt{y}} = \int \frac{dx}{x^2 - 1} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}\left(\sqrt{y} - 1\right)} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

✓ Risolviamo l'integrale al secondo membro con la decomposizione in fratti semplici:

$$\Rightarrow \int \frac{2}{2\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-1\right)}dy = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}\right)dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\log\left(\sqrt{y}-1\right) = \int -\frac{1}{2(x+1)}dx + \int \frac{1}{2(x-1)}dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\log\left(\sqrt{y}-1\right) = -\frac{1}{2}\log(x+1) + \frac{1}{2}\log(x-1) + k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log\left(\sqrt{y}-1\right)^2 = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} + k_1 \Rightarrow \left(\sqrt{y}-1\right)^2 = k_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{y}-1\right) = c\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow y = \left[1 + c\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2$$

Esercizio n. 1.8.1.7

$$y' = te^{-y}$$

✌ $$\frac{y'}{te^{-y}} = t \Rightarrow y'e^{y} = t \Rightarrow e^{y} = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow y = \log\left(\frac{t^2}{2} + c\right)$$

Esercizio n. 1.8.1.8

$$y' = (2 - y)t$$

✌ $$\frac{y'}{2-y} = t \Rightarrow -\log|2-y| = \frac{t^2}{2} + k \Rightarrow 2 - y = e^{-\left(\frac{t^2}{2}+k\right)}$$

$$\Rightarrow y = 2 - e^{-\left(\frac{t^2}{2}+k\right)}$$

Esercizio n. 1.8.1.9

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = e^{x}dx$$

✌ $$\tan y = e^{x} + c \Rightarrow y = \arctan\left(e^{x} + c\right)$$

Esercizio n. 1.8.1.10

$$xy' = \log x$$

$$dy = \frac{\log x}{x}dx \Rightarrow \int \frac{\log x}{x}dx$$

✓ Risolvendo per parti l'integrale al secondo membro si ottiene:

✌ $$y = \frac{1}{2}\log^2 cx$$

Esercizio n. 1.8.1.11

$$y' = e^{x}\cos^2 y$$

Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = e^{x}dx$$

e integrando:

✌ $$\tan y = e^{x} + c \Rightarrow y = \arctan\left(e^{x} + c\right)$$

Esercizio n. 1.8.1.12

$$y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}\ \text{arcsen}\, x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}\ \text{arcsen}\, x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\ \text{arcsen}\, x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log|y| = \log|\text{arcsen}\, x| + c \Rightarrow y = k\,\text{arcsen}\, x$$

Esercizio n. 1.8.1.13

$$y' = \frac{x-3}{y-x+2}$$

Consideriamo le due rette di equazioni $x - 3 = 0$ e $y - x + 2 = 0$; esse si intersecano nel punto di coordinate (3,1).
Poniamo quindi $\xi = x - 3$ e $\eta = y - 1$ e l'equazione di partenza diventa:

$$\eta' = \frac{2\xi}{\eta - \xi} = \frac{2}{\left(\frac{\eta}{\xi}\right) - 1}$$

Eseguiamo la sostituzione $z = z(\xi) = \frac{\eta}{\xi}$; dall'equazione precedente si ricava:

$$\xi z' = -\frac{z^2 - z - 2}{z-1} \Rightarrow \frac{z-1}{-z^2+z+2}dz = \frac{1}{\xi}d\xi \Rightarrow \int \frac{z-1}{-z^2+z+2}dz = \int \frac{1}{\xi}d\xi$$

Risolviamo l'integrale al primo membro dell'equazione:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2z-2}{-z^2+z+2}dz = \frac{1}{2}\int \frac{2z-1-1}{-z^2+z+2}dz = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2z-1}{-z^2+z+2}dz + \int \frac{1}{z^2-z-2}dz\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\log\left(-z^2+z+2\right) + \int\left(\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2}\right)dz\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\log\left(-z^2+z+2\right) + \int \frac{1}{3(z+1)}dz - \int \frac{1}{3(z-2)}dz\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\log\left(-z^2+z+2\right) + \frac{1}{3}\log(z+1) - \frac{1}{3}\log(z-2)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\log\left[\left(\frac{z+1}{z-2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{-z^2+z+2}\right]$$

Quindi si ottiene:

$$\log\left[\left(\frac{z+1}{z-2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{-z^2+z+2}\right]^{\frac{1}{2}} = \log\xi + k = k_1 \log\xi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -(z+1)^2(z-2) = \frac{c}{\xi^3}$$

Ricordando che $z=\dfrac{\eta}{\xi}$ e che $\xi=x-3,\ \ \eta=y-1,$ si ottiene l'integrale generale dell'equazione di partenza:

✌ $$-\left(y+x-4\right)^2\left(y-2x+5\right)=c$$

1.8.2 Equazioni omogenee

Esercizio n. 1.8.2.1

$$xyy'=x^2+y^2$$

Questa è un'equazione riconducibile ad un'equazione omogenea; dividendo ambo i membri per xy si ha:

$$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

posto quindi $z=\dfrac{y}{x}$ e quindi $y=zx\Rightarrow y'=z'x+z$ si ottiene:

$$z'x+z=\frac{1}{z}+z\Rightarrow z'x=\frac{1}{z}\Rightarrow zdz=\frac{1}{x}dx\Rightarrow\int zdz=\int\frac{1}{x}dx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{z^2}{2}=\log x+c$$

tenuto conto della posizione fatta si ha infine:

✌ $$\frac{y^2}{2x^2}=\log x+c\Rightarrow y^2=2x^2\left(\log x+c\right)$$

Esercizio n. 1.8.2.2

$$y^2y'+2xy=x^2y'$$

L'equazione può anche scriversi nella forma:

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

posto $t=\dfrac{y}{x}$ e quindi $y'=t+t'x$ si ha:

$$t+t'x=\frac{2tx^2}{x^2-t^2x^2}=\frac{2t}{1-t^2}$$

da cui:

$$\frac{dt}{dx}x=\frac{2t}{1-t^2}-t=\frac{t+t^3}{1-t^2}\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1-t^2}{t+t^3}dt \tag{1.8.1}$$

Scomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1-t^2}{t\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{\left(1+t^2\right)}$$

da cui:

$$1-t^2=A\left(1+t^2\right)+Bt$$

per $t = 0$, si ha $1 = A$, che sostituito nella precedente espressione fornisce:

$$1 - t^2 = 1 + t^2 + Bt \Rightarrow B = -2t$$

la (1.8.1) diventa quindi:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{2t}{1+t^2} dt \Rightarrow \log x = \log t - \log\left(1+t^2\right) + \log c \Rightarrow x = \frac{ct}{1+t^2} = \frac{cxy}{x^2+y^2}$$

ossia:

✌ $$x^2 + y^2 - cy = 0$$

che è l'integrale generale dell'equazione di partenza e rappresenta una famiglia di circonferenze.

Esercizio n. 1.8.2.3

$$y' \tan x + \tan y = 0$$

Riconduciamo l'equazione ad un'equazione a variabili separabili:

$$\frac{dy}{dx}\frac{1}{\tan y} = -\frac{1}{\tan x} \Rightarrow \frac{dy}{\tan y} = -\frac{dx}{\tan x} \Rightarrow \int \frac{dy}{\tan y} = -\int \frac{dx}{\tan x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log\left|\operatorname{sen} y\right| = -\log\left|\operatorname{sen} x\right| + k \Rightarrow \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} x = e^k$$

Ponendo $e^k = c$ si ottiene:

✌ $$\operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} x = c$$

1.8.3 Equazioni lineari del primo ordine

Esercizio n. 1.8.3.1

$$y' - \frac{1}{x} y = x \operatorname{sen} x$$

Calcoliamo il fattore integrante:

$$e^{-\int -\frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x$$

Per la (1.5.2) si ha quindi:

$$y = z(x) \cdot x \tag{1.8.2}$$

e derivando si ha:

$$y' = z'x + z$$

Sostituendo l'espressione precedente nell'equazione di partenza si ha ancora:

$$z'x + z - \frac{1}{x} y = x \operatorname{sen} x$$

da cui per la (1.8.2) si ha:

$$z'x = x \operatorname{sen} x \Rightarrow z' = \operatorname{sen} x \Rightarrow z(x) = -\cos x + c$$

che sostituita nella (1.8.2) fornisce:

✌ $$y = x(c - \cos x)$$

Esercizio n. 1.8.3.2

$$y' - \frac{1}{1+x}y + 2(1-x^2) = 0$$

Calcoliamo il fattore integrante:

$$e^{-\int -\frac{1}{1+x}dx} = e^{\log|1+x|} = 1+x$$

Per la (1.5.2) si ha quindi:

$$y = z(x)(1+x) \tag{1.8.3}$$

che derivata fornisce:

$$y' = z'(x+1) + z$$

Sostituendo l'espressione precedente nell'equazione di partenza si ha ancora:

$$z'(x+1) + z - \frac{1}{1+x}y = 2(1-x^2)$$

da cui per la (1.8.3) si ha:

$$z' = 2(1-x) \Rightarrow z(x) = 2x - x^2 + c$$

che, sostituita nella (1.8.3), fornisce:

✌ $$y = (1+x)(2x - x^2 + c)$$

Esercizio n. 1.8.3.3

$$y' = 2xy - 2x^3$$

Calcoliamo il fattore integrante:

$$e^{-\int -2x dx} = e^{x^2}$$

Per la (1.5.2) si ha quindi:

$$y = z(x)e^{x^2} \tag{1.8.4}$$

che derivata fornisce:

$$y' = z'e^{x^2} + z \cdot 2x \cdot e^{x^2}$$

Sostituendo l'espressione precedente nell'equazione di partenza si ha ancora:

$$z'e^{x^2} + 2xze^{x^2} - 2xy = -2x^3$$

da cui per la (1.8.4) si ha:

$$z'e^{x^2} = -2x^3 \Rightarrow z' = -2x^3e^{-x^2} \Rightarrow z(x) = \int -2x^3e^{-x^2}dx$$

Risolvendo l'integrale per parti si verifica facilmente che:

$$z(x) = e^{-x^2}\left(1 + x^2\right) + c$$

che sostituita nella (1.8.4) fornisce:

✌ $$y = ce^{x^2} + x^2 + 1$$

Esercizio n. 1.8.3.4

$$xy' - y - x^2 \cos x = 0$$

Dividiamo l'equazione per x e calcoliamo il fattore integrante:

$$e^{-\int -\frac{1}{x}dx} = e^{\log x} = x$$

Per la (1.5.2) si ha quindi:

$$y = z(x) \cdot x \tag{1.8.5}$$

che derivata fornisce:

$$y' = z'x + z$$

Sostituendo l'espressione precedente nell'equazione di partenza si ha ancora:

$$z'x + z - \frac{y}{x} - 2x \cos x = 0$$

da cui per la (1.8.5) si ha:

$$z' = \cos x \Rightarrow z(x) = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$$

che sostituita nella (1.8.5) fornisce:

✌ $$y = x \operatorname{sen} x + cx$$

Esercizio n. 1.8.3.5

$$xy' - y - x^2 - 1 = 0$$

Dividiamo l'equazione per x e calcoliamo il fattore integrante:

$$e^{-\int -\frac{1}{x}dx} = e^{\log x} = x$$

Per la (1.5.2) si ha quindi:

$$y = z(x) \cdot x \tag{1.8.6}$$

che derivata fornisce:

$$y' = z'x + z$$

Sostituendo l'espressione precedente nell'equazione di partenza si ha ancora:

$$z'x + z - \frac{y}{x} - x - \frac{1}{x} = 0$$

da cui per la (1.8.6) si ha:

$$z' = 1 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow z(x) = x - \frac{1}{x} + c$$

che sostituita nella (1.8.6) fornisce:

✌ $$y = x^2 + cx - 1$$

Esercizio n. 1.8.3.6

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$(\operatorname{sen} x)\, y' + (\cos x)\, y = e^x$$

Dividiamo l'equazione per sen$x$ ottenendo:

$$y' + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} y = \frac{e^x}{\operatorname{sen} x}$$

Notiamo che y = sen x per $x = k\pi$ non è un integrale singolare dell'equazione. Per risolvere l'equazione calcoliamo il fattore integrante:

$$e^{-\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} = e^{-\log \sin x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Per la (1.5.2) si ha quindi:

$$y = z(x) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \tag{1.8.7}$$

che derivata fornisce:

$$y' = z' \frac{1}{\operatorname{sen} x} - z \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Sostituendo l'espressione precedente nell'equazione di partenza si ha ancora:

$$z' \frac{1}{\operatorname{sen} x} - z \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} y = \frac{e^x}{\operatorname{sen} x}$$

da cui per la (1.8.7) si ha:

$$z' \frac{1}{\operatorname{sen} x} - z \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} z = \frac{e^x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow z' \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{e^x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow z' = e^x \Rightarrow z(x) = e^x + c$$

che sostituita nella (1.8.7) fornisce:

✌ $$y = \frac{e^x + c}{\operatorname{sen} x}$$

Esercizio n. 1.8.3.7

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' - \frac{y}{\operatorname{sen} x \cos x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

Risolviamo per prima cosa l'equazione omogenea associata:

$$y' - \frac{y}{\operatorname{sen} x \cos x} = 0$$

Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\operatorname{sen} x \cos x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

e integrando:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

✓ Esprimiamo il prodotto sen x cos x in funzione della tangente, ottenendo:

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

L'integrale quindi diventa:

$$\log y = \int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} dx = \log|\tan x| + c$$

essendo $1 + \tan^2 x$ la derivata di tan x. La soluzione dell'omogenea quindi è:

$$y(x) = k \tan x$$

Determiniamo una soluzione particolare mediante il metodo della variazione delle costanti di Lagrange; assumiamo quindi una soluzione particolare del tipo:

$$y_p = c(x) \tan x \tag{1.8.8}$$

la cui derivata è:

$$y' = c'(x) \tan x + c(x) \frac{1}{\cos^2 x} \tag{1.8.9}$$

Sostituendo le (1.8.8) e (1.8.9) nell'equazione di partenza otteniamo:

$$c'(x) \tan x + c(x) \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{c(x) \tan x}{\operatorname{sen} x \cos x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c'(x) \tan x = -\operatorname{sen} x \tan x \Rightarrow c'(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c(x) = \cos x$$

Quindi la soluzione particolare è:

$$y_p = \cos x \tan x = \operatorname{sen} x$$

e l'integrale generale dell'equazione completa sarà:

✌

$$y(x) = k \tan x + \operatorname{sen} x$$

Esercizio n. 1.8.3.8

Risolvere la seguente equazione:

$$y' = -\frac{y}{1+x^2} + e^{-\arctan x}\log^2 x$$

Risolviamo prima l'equazione omogenea associata:

$$y' + \frac{y}{1+x^2} = 0$$

Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \log y = -\arctan x + c \Rightarrow y = e^{-\arctan x + c} \Rightarrow y = ke^{-\arctan x}$$

Troviamo ora una soluzione particolare con il metodo della variazione delle costanti di Lagrange:

$$y_p(x) = c(x)e^{-\arctan x} \tag{1.8.10}$$

la cui derivata prima è:

$$y_p'(x) = c'(x)e^{-\arctan x} - c(x)e^{-\arctan x}\frac{1}{1+x^2} \tag{1.8.11}$$

Sostituendo le (1.8.10) e (1.8.11) nell'equazione di partenza otteniamo:

$$c'(x)e^{-\arctan x} - c(x)e^{-\arctan x}\frac{1}{1+x^2} = -c(x)e^{-\arctan x}\frac{1}{1+x^2} + e^{-\arctan x}\log^2 x$$

da cui:

$$c'(x)e^{-\arctan x} = e^{-\arctan x}\log^2 x \Rightarrow c'(x) = \log^2 x \Rightarrow c(x) = x\log^2 x - 2x(\log x - 1)$$

Quindi:

$$y_p(x) = \left(x\log^2 x - 2x\log x + 2x\right)e^{-\arctan x}$$

e in conclusione l'integrale generale dell'equazione completa è:

✌ $$y(x) = ke^{-\arctan x} + \left(x\log^2 x - 2x\log x + 2x\right)e^{-\arctan x}$$

1.8.4 Equazioni di Bernoulli

Esercizio n. 1.8.4.1

Risolvere la seguente equazione di Bernoulli:

$$y' = x\left(y - y^3\right)$$

Si tratta di un'equazione con esponente $n=3$; notiamo che la funzione $y=0$ è una soluzione. Se $y \neq 0$, dividendo per y^3 otteniamo:

$$\frac{y'}{y^3} = xy^{-2} - x$$

Ponendo $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}\, y'$, otteniamo un'equazione lineare nell'incognita z:

$$z' + 2xz - 2x = 0 \tag{1.8.12}$$

Calcoliamo il fattore integrante:

$$e^{-\int 2x dx} = e^{-x^2}$$

Per la (1.5.2) si ha:

$$z = u(x)e^{-x^2} \tag{1.8.13}$$

e derivando si ha:

$$z' = u'e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}u$$

Sostituendo l'espressione precedente nell'equazione (1.8.12) si ha ancora:

$$u'e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}u + 2xz = 2x$$

da cui per la (1.8.13) si ha:

$$u'e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}u + 2xue^{-x^2} = 2x \Rightarrow u' = 2xe^{x^2}$$
$$\Rightarrow u = \int 2xe^{x^2}\, dx \Rightarrow u = e^{x^2} + c$$

Dalla (1.8.13) si ottiene quindi che:

$$z(x) = 1 + ce^{-x^2}$$

Infine, la soluzione dell'equazione di partenza è data da:

$$y(x) = \pm\left(1 + ce^{-x^2}\right)^{-1/2} \tag{1.8.14}$$

Tutte le soluzioni espresse dalla (1.8.14) sono di segno costante, cioè positive o negative per ogni x. La soluzione $y=0$, trovata all'inizio, non si ottiene dalla (1.8.14) per alcun valore di c, per cui essa è un integrale singolare.

Esercizio n. 1.8.4.2

Integrare l'equazione:

$$y' - xy = x^3 y^2 \tag{1.8.15}$$

L'equazione è del tipo:

$$y' + a_1(x)\,y = f(x)\,y^\alpha$$

E quindi è un'equazione di Bernoulli che si può riscrivere dividendo entrambi i membri per y^2, nella forma:

$$\frac{y'}{y^2} - x\frac{1}{y} = x^3 \tag{1.8.16}$$

Si noti che questa equazione non è equivalente alla (1.8.15) in quanto non ammette l'integrale nullo. Per integrarla poniamo:

$$\frac{1}{y} = z$$

Poiché $y(x)$ soddisfa la (1.8.16), la funzione $z(x)$ soddisfa l'equazione che da essa si ottiene esprimendo il primo membro in funzione di $z(x)$. Osserviamo che si ha:

$$z'(x) = \frac{-y'(x)}{y^2(x)}$$

ossia.

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -z'(x)$$

Pertanto, poiché risulta:

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} - x\frac{1}{y(x)} = x^3$$

risulta anche $-z'(x) - xz(x) = x^3$. Quindi $z(x)$ soddisfa l'equazione $-z'(x) - xz(x) = x^3$ ossia l'equazione:

$$z' + xz = -x^3 \tag{1.8.17}$$

che è un'equazione lineare completa del 1° ordine. L'equazione omogenea associata è:

$$z' + xz = 0$$

che è un'equazione a variabili separabili riscrivibile nella forma:

$$\frac{dz}{z} = -xdx \tag{1.8.18}$$

Per integrare quest'ultima, detto z un generico integrale di essa, osserviamo che si ha:

$$\int \frac{dz}{z} = -\int xdx$$

e quindi:

$$\log|z| = -\frac{x^2}{2} + k$$

con k opportuna costante reale. Pertanto, si ha:

$$|z| = e^k e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ossia:

$$z = \pm e^k e^{-\frac{x^2}{2}} \begin{cases} + & \text{se risulta } z(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ - & \text{se risulta } z(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Posto $c = \pm e^k$ si ha $z = ce^{-\frac{x^2}{2}}$, pertanto la funzione:

$$z = ce^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Fornisce l'integrale generale della (1.8.18).

Cerchiamo ora un integrale particolare della (1.8.17) col metodo di Lagrange, ovvero un integrale particolare del tipo:

$$u(x) = \gamma(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Con $\gamma(x)$ funzione derivabile incognita da determinare. Per determinare $\gamma(x)$ imponiamo che $u(x)$ sia un integrale della (1.8.17). Ciò facendo si ha:

$$\gamma'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + \gamma(x) e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) + x\gamma(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = -x^3 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma'(x) = -x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$$

Quindi si ha:

$$\gamma(x) = -\int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx = -\int x^2 d\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right) = -x^2 e^{\frac{x^2}{2}} + \int e^{\frac{x^2}{2}} 2x dx =$$

$$= -x^2 e^{\frac{x^2}{2}} + 2\int d\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right) = -x^2 e^{\frac{x^2}{2}} + 2e^{\frac{x^2}{2}} + c = e^{\frac{x^2}{2}}\left(2 - x^2\right) + c$$

Pertanto, si ha $u(x) = \gamma(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(2 - x^2\right)$. Quindi la funzione:

$$z = ce^{\frac{x^2}{2}} + \left(2 - x^2\right) \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}$$

fornisce l'integrale generale della (1.8.17). Ponendo in essa $z = \frac{1}{y}$ si ottiene l'equazione (dipendente dal parametro c):

$$\frac{1}{y} = ce^{\frac{x^2}{2}} + \left(2 - x^2\right)$$

La quale è un integrale generale in forma implicita della (1.8.15). L'integrale generale in forma esplicita sarà dato da:

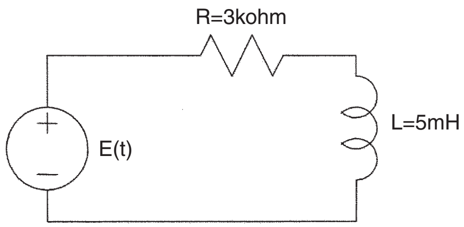
$$y = \frac{1}{ce^{\frac{x^2}{2}} + \left(2 - x^2\right)}$$

■ 8 Applicazioni delle equazioni differenziali

Problema n. 8.1

In figura è mostrato un circuito R-L serie con una tensione applicata $E(t) = 240\,(1 - e^{-t/3})$. Ricavare:

1. l'espressione della corrente in funzione del tempo;
2. la soluzione del problema di Cauchy associato con condizione iniziale $i(0) = 0$.



1. ✓ Applicando la legge di Kirchhoff si ottiene:

$$E(t) = V_R + V_L$$

avendo indicato con V_R e V_L le cadute di tensione rispettivamente sul resistore e sull'induttore; ricordiamo dall'elettrotecnica che le cadute si possono esprimere come:

$$V_R = R \cdot I$$

$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$

Quindi, possiamo riscrivere la legge di Kirchhoff come:

$$E(t) = RI + L\frac{dI}{dt}$$

Sostituendo i valori in figura si ottiene l'equazione differenziale lineare del primo ordine da risolvere:

$$\frac{dI}{dt} + 6 \cdot 10^5\, I = 48 \cdot 10^3 \left(1 - e^{-t/3}\right)$$

Calcoliamo il fattore integrante:

$$e^{-\int 6 \cdot 10^5 dt} = e^{-6 \cdot 10^5 t}$$

Per la (1.5.2) si ha quindi:

$$I = z(t) \cdot e^{-6 \cdot 10^5 t} \tag{8.1}$$

e derivando si ha:

$$I' = z'e^{-6 \cdot 10^5 t} - 6 \cdot 10^5 z e^{-6 \cdot 10^5 t}$$

Sostituendo l'espressione precedente nell'equazione di partenza si ha ancora:

$$z'e^{-6 \cdot 10^5 t} - 6 \cdot 10^5 z e^{-6 \cdot 10^5 t} + 6 \cdot 10^5\, I = 48 \cdot 10^3 \left(1 - e^{-t/3}\right)$$

e quindi:

$$z' e^{-6 \cdot 10^5 t} = 48 \cdot 10^3 \left(1 - e^{-t/3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(t) = \int 48 \cdot 10^3 \left(1 - e^{-t/3}\right) \cdot e^{6 \cdot 10^5 t} dt = 8 \cdot 10^{-2} e^{6 \cdot 10^5 t} - \frac{48 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^5 - \frac{1}{3}} e^{\left(6 \cdot 10^5 - \frac{1}{3}\right)t} + c$$

che sostituita nella (8.1) fornisce:

$$I = 8 \cdot 10^{-2} - \frac{48 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^5 - \frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{3}t} + c e^{-6 \cdot 10^5 t}$$

2. Imponendo la condizione iniziale si ricava:

$$c = \frac{48 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^5 - \frac{1}{3}} - 8 \cdot 10^{-2}$$

Problema n. 8.2

Un corpo di massa m si muove sotto l'azione di una forza elastica $F = -kx$ (k è la costante elastica ed x è lo spostamento del corpo dalla posizione di equilibrio). Determinare la legge oraria del moto $x = x(t)$, sapendo che per $t = 0$ è $x = R$ e $v = 0$ (velocità).

✓ Ricordando che $F = ma$ e che a (accelerazione) è la derivata seconda di x rispetto al tempo, possiamo scrivere:

$$mx'' = -kx$$

Si tratta di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine che possiamo porre nella forma usuale:

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

L'equazione caratteristica associata è:

$$\alpha^2 + \frac{k}{m} = 0$$

che ha radici reali complesse immaginarie pure $\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Dalla tabella 2.1, essendo nel caso $\frac{\Delta}{4} < 0,\ a = 0$ si ha che la soluzione dell'equazione è:

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Da questa equazione possiamo giungere all'espressione della velocità v in funzione del tempo ($v = x'$):

$$v = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

e imporre alle due leggi $x = x\,(t)$ e $v = v\,(t)$ di soddisfare alle condizioni iniziali $x\,(0) = R$ e $v\,(0) = 0$ ottenendo $R = A$, $0 = B\sqrt{\frac{k}{m}}$. Dunque, l'equazione del moto risulta:

$$x(t) = R\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Problema n. 8.3

Consideriamo un barile di acqua che può essere svuotato mediante un rubinetto; all'istante $t = 0$ il rubinetto viene aperto. Il livello dell'acqua nel barile è indicato con h [m]; all'istante $t = 0$ il livello h è pari a 6. La variazione del livello in funzione del tempo è descritta dalla seguente relazione:

$$\frac{dh}{dt} = -3.5 \cdot 10^{-3}\sqrt{h}$$

Trovare la legge che esprime il livello *h* in funzione del tempo.

Si tratta, semplicemente, di risolvere il seguente problema di Cauchy, avendo individuato in $h\,(0) = 6$ la condizione iniziale.

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -3.5 \cdot 10^{-3}\sqrt{h} \\ h(0) = 6 \end{cases}$$

L'equazione differenziale è un'equazione a variabili separabili facilmente integrabile:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -3.5 \cdot 10^{-3}dt \Rightarrow \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = \int -3.5 \cdot 10^{-3}dt \Rightarrow h = \frac{\left(3.5 \cdot 10^{-3}t + c\right)^2}{4}$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene:

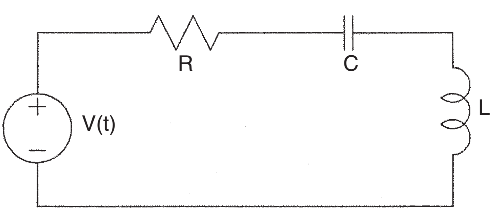
$$h(0) = \frac{c^2}{4} = 6 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Quindi la soluzione del problema è:

$$h = \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 3.5 \cdot 10^{-3}t\right)^2}{4}$$

Problema n. 8.4

Consideriamo un circuito elettrico costituito da una resistenza *R*, un'induttanza *L* e un condensatore *C* in serie, a cui sia applicata una tensione variabile *V* (*t*).
Determinare l'espressione della carica immagazzinata nel condensatore al variare del tempo.



✓ Dall'elettrotecnica sappiamo che, per la prima legge di Kirchhoff, la somma delle cadute di tensione in una maglia deve essere nulla, ossia:

$$V_R + V_C + V_L = V(t) \tag{8.2}$$

Inoltre, sappiamo che le cadute sui tre componenti passivi si possono esprimere come:

$$V_R = R \cdot I = R\frac{dQ(t)}{dt}$$

$$V_C = \frac{Q(t)}{C}$$

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}$$

avendo indicato con $Q(t)$ la carica immagazzinata nel condensatore. Quindi sostituendo le tre precedenti espressioni nella (8.2) si ottiene:

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = V(t)$$

che è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti; cercando una soluzione del tipo:

$$Q(t) = Ae^{i\omega t}$$

per l'equazione omogenea associata, troviamo l'equazione caratteristica:

$$L\omega^2 + R\omega + \frac{1}{C} = 0$$

Se $\Delta = \boldsymbol{R^2 - 4\frac{L}{C} > 0}$ si trova la **soluzione decrescente**:

✌ $$Q(t) = e^{-\frac{R}{2Lt}}\left[c_1 e^{\frac{t\Delta}{2L}} + c_2 e^{-\frac{t\Delta}{2L}}\right]$$

Se $\Delta = \boldsymbol{R^2 - 4\frac{L}{C} < 0}$ si ha la **soluzione oscillante**:

✌ $$Q(t) = Ae^{-\frac{R}{2Lt}}\cos\left[\left(\frac{t\sqrt{-\Delta}}{2L}\right) + \varphi\right]$$

In particolare, per $\boldsymbol{R = 0}$ si ha:

$$Q(t) = A\cos\left[\left(\frac{t\sqrt{-\Delta}}{2L}\right) + \varphi\right]$$

dove A è l'ampiezza e φ la fase.

Se $\boldsymbol{R^2 - 4\frac{L}{C} = 0}$ si trova la **soluzione**:

✌ $$Q(t) = e^{-\frac{R}{2Lt}}\left[c_1 + c_2 t\right]$$

Problema n. 8.5

In un serbatoio cilindrico, di base $3dm^2$ e altezza 1 metro, viene immessa acqua con portata costante di 3 litri al minuto. L'acqua viene poi assorbita dal fondo con velocità proporzionale al volume di acqua presente secondo la costante di proporzionalità 1/10 (esprimendo il volume in litri e la velocità di uscita in litri al minuto). All'istante $t = 0$ il serbatoio è vuoto. Determinare il tempo necessario perchè il livello dell'acqua raggiunga $5dm$ e dire, giustificando la risposta, se il recipiente si riempie.

Indicando con $y(t)$ il volume dell'acqua contenuta nel serbatoio all'istante t, la variazione di y nell'intervallo $[t, t + \Delta t]$ può essere espressa da $y(t+\Delta t) - y(t) \approx 3\Delta t - \frac{1}{10} y(t)\Delta t$. Dividendo per Δt e facendo tendere questa quantità a zero, otteniamo l'equazione differenziale del primo ordine

$$y' = 3 - \frac{1}{10} y$$

La soluzione generale di questa equazione si ottiene come segue:

$$y' + \frac{1}{10} y = 3 \;\Rightarrow\; e^{\frac{1}{10}t} y' + \frac{1}{10} e^{\frac{1}{10}t} y = 3e \frac{1}{10} t \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{1}{10}t} y\right) = 3e^{\frac{1}{10}t} \;\Rightarrow\; e^{\frac{1}{10}t} y = 30e^{\frac{1}{10}t} + c$$

$$\Rightarrow\; y(t) = 30 + ce^{-\frac{1}{10}t}$$

Dalla condizione iniziale $y(0) = 0$ otteniamo $c = -30$ e quindi il volume dell'acqua presente nel serbatoio all'istante t è dato da

$$y(t) = 30 - 30e^{-\frac{1}{10}t}$$

Il livello dell'acqua è di $5dm$ quando il volume dell'acqua è 15 litri. Posto quindi $15 = 30 - 30e^{-\frac{1}{10}t}$ otteniamo $t = 10 \log 2$. Sono quindi necessari $10 \log 2$ minuti affinché il livello dell'acqua raggiunga i $5dm$.

✌ Il serbatoio non si riempie. Infatti, da $30 = 30 - 30e^{-\frac{1}{10}t}$ otteniamo $e^{-\frac{1}{10}t} = 0$ che non ha soluzioni finite.

Problema n. 8.6

Un corpo è esposto ad una temperatura costante di $280K$. Dopo 1 minuto la temperatura del corpo è $350K$ e dopo 5 minuti è $310K$. Trovare un'espressione per la temperatura θ in funzione del tempo t. Rappresentare l'andamento della temperatura θ in funzione del tempo t.

✓ Ricordando la legge di Newton che afferma che la velocità con la quale un corpo si raffredda è proporzionale alla differenza tra la temperatura del corpo e quella dell'ambiente circostante secondo una costante di proporzionalità detta k, possiamo scrivere:

$$\frac{d\theta}{dt} = k(\theta - 280)$$

Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{d\theta}{\theta - 280} = kdt$$

e integrando:

$$\int \frac{d\theta}{\theta - 280} = \int k dt \Rightarrow \log(\theta - 280) = kt + c$$

Siccome t è espresso in secondi abbiamo che:

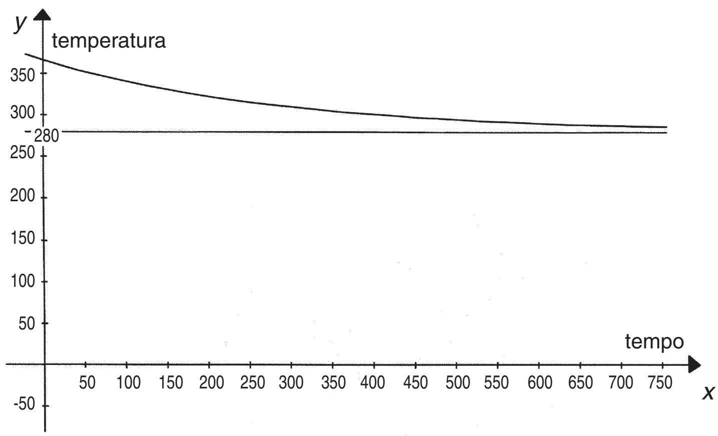
$$\log(350–280) = k \cdot 60 + c$$

e

$$\log(310–280) = k \cdot 300 + c$$

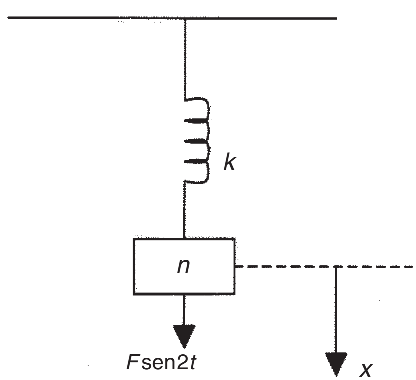
Risolvendo le due precedenti equazioni con $k = -3.53 \cdot 10^{-3}$ si ottiene $c = 4.46$. Pertanto, sostituendo questo valore nell'espressione precedente e passando agli esponenziali si ottiene:

$$\theta = 280 + e^{4.46-(3.53 \cdot 10^{-3})t}$$



Problema n. 8.7

Il sistema in figura è costituito da una massa attaccata ad una molla di costante elastica k e soggetta ad una forza pari a F sen $(2t)$ lungo x.
Ricavare l'equazione del moto.



✓ Ricordando la legge di Hooke per un sistema sottoposto ad una forza esterna si ottiene:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F \operatorname{sen}(2t)$$

ovvero:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m} \operatorname{sen}(2t)$$

Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti che può essere risolta con i metodi illustrati in precedenza. In particolare l'integrale dell'equazione omogenea associata risulta del tipo:

$$x = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t)$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Determiniamo, ora, una soluzione particolare, del tipo:

$$x_p(t) = C \text{ sen } (2t) + D \cos (2t)$$

Con semplice derivazione della funzione precedente si ricava:

$$x_p'' + \frac{k}{m} x_p = -4C \operatorname{sen}(2t) - 4D \cos(2t) + \frac{k}{m}\left(C \operatorname{sen}(2t) + D\cos(2t)\right)$$
$$= \left(\frac{k}{m} - 4\right) C \operatorname{sen}(2t) + \left(\frac{k}{m} - 4\right) D \cos(2t) = \frac{F}{m} \operatorname{sen}(2t)$$

Affinché x_p sia soluzione dell'equazione di partenza occorre che:

$$D = 0 \text{ e } \left(\frac{k}{m} - 4\right) C = \frac{F}{m} \Rightarrow C = \frac{F}{k - 4m}$$

In definitiva, la soluzione generale dell'equazione completa è:

$$x = A\cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{F}{k - 4m} \operatorname{sen}(2t)$$

Problema n. 8.8

La popolazione di una città ha un tasso di crescita, risultante dalle nascite e dalle morti ed espresso in individui per anno, proporzionale al numero di abitanti e con coefficiente di proporzionalità 0.1. Ogni anno inoltre 10.000 individui emigrano verso altre città.

1. Supponendo che all'istante iniziale il numero di abitanti sia 200.000, determinare la funzione $N = N(t)$ che dà il numero di abitanti all'istante t (in anni).
2. Supponendo che all'istante iniziale il numero di abitanti sia $N_0 > 0$, dire per quali valori di N_0 la popolazione si estingue.

La variazione di $N(t)$ nell'intervallo $[t, t + \Delta t]$ può essere espressa da:

$$N(t + \Delta t) - N(t) \approx \frac{1}{10} N(t)\Delta t - 10.000\Delta t$$

Dividendo a destra e sinistra per Δt e facendo tendere a zero, otteniamo l'equazione differenziale:

$$N'(t) - \frac{1}{10} N(t) = -10.000$$

La cui soluzione generale è:

$$N(t) = 100.000 + ce^{\frac{1}{10}t}$$

1. Posto $N(0) = 200.000$ otteniamo $c = 100.000$ e quindi il numero di abitanti in funzione del tempo diventa:

$$N(t) = 100.000 + 100.000e^{\frac{t}{10}}$$

2. Posto $N(0) = N_0$, otteniamo $c = N_0 - 100.000$ e quindi il numero di abitanti in funzione del tempo diventa $N(t) = 100.000 + (N_0 - 100.000)e^{\frac{1}{10}t}$. La popolazione si estingue se esistono

valori di $t > 0$ tali che $N(t) = 0$, cioè se l'equazione $100.000 + (N_0 - 100.000)e^{\frac{1}{10}t} = 0$ ha soluzioni positive. Questa equazione equivale a:

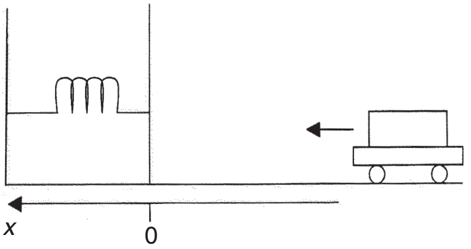
$$e^{\frac{1}{10}t} = \frac{-100.000}{N_0 - 100.000} \quad \Rightarrow \quad t = 10\log\left(\frac{-100.000}{N_0 - 100.000}\right)$$

L'equazione ha una soluzione reale per $\frac{-100.000}{N_0 - 100.000} > 0$; tale soluzione è, inoltre, positiva per $\frac{-100.000}{N_0 - 100.000} > 1$ cioè per:

$$N_0 < 100.000$$

Problema n. 8.9

Un veicolo deve essere arrestato usando una parete elastica. La massa del veicolo è $3\cdot 10^3$ *kg*, la costante elastica è $k = 27 \cdot 10^3 \frac{N}{m}$, la forza con cui il veicolo è spinto verso la parete è $6\cdot 10^3 N$. Determinare l'espressione della compressione x in funzione di t, assumendo come condizioni iniziali $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.



✓ Applicando la seconda legge di Newton otteniamo l'equazione differenziale da risolvere per ottenere l'espressione di x:

$$3\cdot 10^3\, x'' + 27\cdot 10^3\, x + 6\cdot 10^3 = 0$$

Dividendo tutto per $3\cdot 10^3$ si ottiene:

$$x'' + 9x + 2 = 0$$

che è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti; l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è:

$$x(t) = A\cos(3t) + B\,\mathrm{sen}(3t)$$

Un integrale particolare si può determinare invece imponendo una soluzione costante, e quindi annullando la derivata seconda:

$$9x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{9}$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione completa sarà:

$$x(t) = A\cos(3t) + B\,\mathrm{sen}(3t) - \frac{2}{9}$$

Applicando le condizioni iniziali otteniamo:

$$A = \frac{2}{9}, \quad B = 0$$

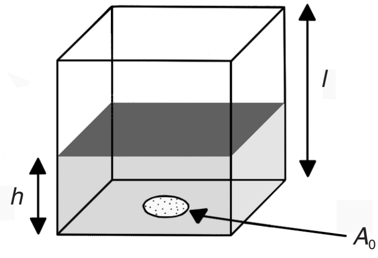
e, quindi, l'espressione di x è data da:

$$x(t) = \frac{2}{9}\cos 3t - \frac{2}{9}$$

Problema n. 8.10

Un contenitore cubico di lato 3m è pieno di acqua fino ad una altezza pari ad h. Il contenitore viene svuotato mediante un foro circolare di diametro 0.1m.

1. Ricavare l'equazione differenziale che lega l'altezza dell'acqua al tempo t;
2. risolvere quest'equazione differenziale per una condizione iniziale $h(0) = 2$;
3. quanto tempo (in minuti) impiega il contenitore a svuotarsi se h è pari a 2?
4. rappresentare graficamente l'andamento di h in funzione del tempo.



1. Il volume di acqua che esce dal foro per *unità di tempo* è:

$$A_0\sqrt{2gh}$$

✓ dove ricordiamo che g è l'accelerazione di gravità e $v = \sqrt{2gh}$ rappresenta la legge di Torricelli. Il volume di acqua che esce dal contenitore nel tempo Δt è:

$$A_0\sqrt{2gh}\cdot\Delta t$$

quindi la variazione di volume ΔV di acqua nel contenitore nel tempo Δt è:

$$\Delta V = -\left(A_0\sqrt{2gh}\right)\Delta t$$

dove il segno negativo è dovuto al fatto che il volume diminuisce. Dalla espressione precedente si ricava che:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = -A_0\sqrt{2gh}$$

Passando al limite si ottiene:

$$\frac{dV}{dt} = -A_0\sqrt{2gh}$$

Il volume di acqua nel contenitore può essere espresso come $A\cdot h$ dove A è la sezione trasversa del serbatoio. Sostituendo questa espressione nella precedente si ottiene:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0\sqrt{2gh}}{A} \tag{8.3}$$

L'area del foro A_0 è pari a:

$$\pi\cdot\frac{d^2}{4} = \pi\cdot 0.05^2 = 2.5\cdot\pi\cdot 10^{-3}m^2$$

Siccome il contenitore è cubico e presenta un lato di 3m la sua sezione trasversa sarà pari a 9m^2. La (8.3) diventa allora:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{2.5\cdot\pi\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{2gh}}{9} = -3.87\cdot 10^{-3}\sqrt{h}$$

2. Dobbiamo risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -3.87 \cdot 10^{-3}\sqrt{h} \\ h(0) = 2 \end{cases}$$

L'equazione di partenza può essere risolta semplicemente separando le variabili:

$$\int h^{-1/2} dh = \int -3.87 \cdot 10^{-3} dt \Rightarrow 2h^{1/2} = -\left(3.87 \cdot 10^{-3}\right)t + c$$

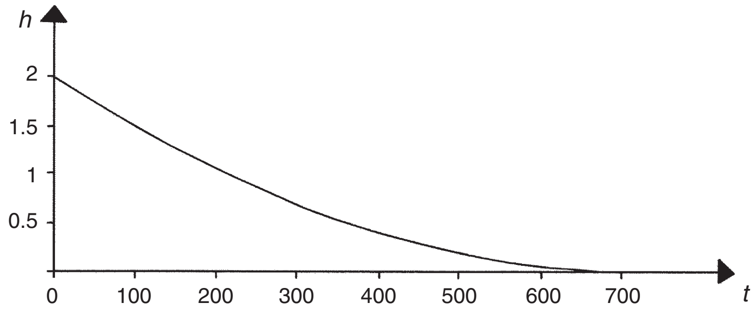
Sostituendo la condizione iniziale si ottiene $c = 2\sqrt{2}$. Quindi la soluzione del problema è:

✌ $$h^{1/2} = -\left(1.935 \cdot 10^{-3}\right)t + \sqrt{2}$$

3. Sostituendo nella soluzione trovata $h = 0$ si ottiene $t = 731s$ che sono pari a:

✌ 12.18 minuti

4. ✌



Problema n. 8.11

Un serbatoio ha una capacità totale di 14 m^3 ed inizialmente contiene 7m^3 d'acqua. Nel serbatoio viene versata dell'acqua con velocità costante di $1/3m^3/h$, mentre da un foro posto sul fondo esce dell'acqua con velocità, espressa in m^3/h, proporzionale alla quantità d'acqua contenuta e con coefficiente di proporzionalità 0.05.

1. Esprimere la quantità d'acqua contenuta nel serbatoio in funzione del tempo;
2. dire se il serbatoio si svuota, oppure si riempie, oppure non si svuota né si riempie.

1. Indicata con $y(t)$ la quantità d'acqua presente all'istante t, si ricava:

✌ $$y(t) = \frac{1}{3}\left(20 + e^{-\frac{t}{20}}\right)$$

2. L'equazione $y(t) = 0$ non ha soluzioni e l'equazione $y(t) = 14$ ha soluzione negativa:

$$t = -20 \log 22$$

✌ e quindi, per $t > 0$ il serbatoio non si svuota né si riempie.

Indice generale