Funzione 16: $f(x) = \text{arcsenln}(x^2+1)$ (funzione trascendente)

◆ **Campo di esistenza**

✔ Poiché l'argomento del logaritmo naturale è una quantità sempre positiva, basta imporre che l'argomento dell'arcoseno sia compreso tra –1 ed 1, cioè:

$$-1 \le \ln(x^2+1) \le 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \le x^2 + 1 \le e \Rightarrow \frac{1}{e} - 1 \le x^2 \le e - 1$$

poiché, poi, $x^2 \ge 0 \ \forall x \in R$ e la quantità $\frac{1}{e} - 1$ è negativa, la diseguaglianza di sinistra è sempre verificata, per cui deve aversi soltanto:

$x^2 \le e - 1 \Rightarrow -\sqrt{e-1} \le x \le \sqrt{e-1}$.

✌ Riassumendo:

$$C.\,E. = \left[-\sqrt{e-1},\ \sqrt{e-1}\right]$$

◆ **Simmetrie**

✌ La funzione è pari, per cui può essere studiata nell'intervallo $[0, \sqrt{e-1}[$.

◆ **Eventuali intersezioni con gli assi**

Per $x = 0$, si ha $y = \text{arcsenln}1 = \text{arcsen}0 = 0$;
per $y = 0$, $\text{arcsenln}(x^2+1) = 0 \Rightarrow \ln(x^2+1) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$.

✌ Dunque, la curva passa per l'origine e non interseca ulteriormente gli assi cartesiani.

◆ **Studio del segno della funzione**

✔ Si deve imporre: $\text{arcsenln}(x^2+1) \ge 0$; ricordando che la funzione arcoseno è strettamente crescente per $x > 0$, deve aversi $\ln(x^2+1) \ge 0 \Rightarrow x^2 + 1 \ge 1 \Rightarrow x^2 \ge 0$, condizione sempre verificata.

✌ Ne consegue che la funzione è non negativa nel suo campo di esistenza; poiché si è visto che la curva passa per l'origine, si arguisce che tale punto rappresenta il minimo assoluto della curva.

◆ **Comportamento negli estremi del campo ed eventuali asintoti**

Asintoti verticali

$$\lim_{x\to\sqrt{e-1}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{e-1}^-} \text{arcsenln}(x^2+1) = f\left(\sqrt{e-1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

✌ La funzione è continua nel punto x = $\sqrt{e-1}$ e vale $\frac{\pi}{2}$; essa, quindi non presenta asintoti verticali, bensì 'entra' nel punto $A\left(\sqrt{e-1};\ \frac{\pi}{2}\right)$ con pendenza che resta da determinarsi.

Asintoti orizzontali ed obliqui

✌ Essendo limitato il dominio di definizione della funzione, non vi sono asintoti orizzontali né obliqui.

◆ **STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA**

✔ Ricordando che $D[\text{arcsen}g(x)] = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-[g(x)]^2}}$, si ha:

$$f'(x)=\frac{D\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]}{\sqrt{1-\ln^2\left(x^2+1\right)}}=\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\sqrt{1-\ln^2\left(x^2+1\right)}}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{1-\ln^2\left(x^2+1\right)}}\text{, con } x\in\left]-\sqrt{e-1},+\sqrt{e-1}\right[$$

$$f'(x)\geq 0\Rightarrow\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{1-\ln^2\left(x^2+1\right)}}\geq 0$$

$N\geq 0\ \ \forall x\geq 0$

$D>0\ \ \forall x\in\left]-\sqrt{e-1},+\sqrt{e-1}\right[$

✌ Quindi, la funzione è strettamente crescente per $x > 0$, strettamente decrescente per $x < 0$ e presenta un minimo nell'origine, come già osservato durante lo studio del segno della funzione.

◆ **COMPORTAMENTO DELLA DERIVATA PRIMA NEL PUNTO $x = \sqrt{e-1}$**

$$\lim_{x\to\sqrt{e-1}^-} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{e-1}^-}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{1-\ln^2\left(x^2+1\right)}}=+\infty$$

dove si è tenuto conto del fatto che in $x = \sqrt{e-1}$ il fattore al denominatore $\sqrt{1-\ln^2\left(x^2+1\right)}$ è infinitesimo.

✌ Da ciò discende che la curva 'entra' nel punto $A\left(\sqrt{e-1};\ \frac{\pi}{2}\right)$ con pendenza infinita, cioè, che in tale punto la curva presenta tangente verticale.

◆ **STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA**

$$f''(x)=2\frac{(x^2+1)\cdot\sqrt{1-\ln^2(x^2+1)}-x\cdot\left[2x\cdot\sqrt{1-\ln^2(x^2+1)}-\dfrac{2(x^2+1)\ln(x^2+1)\cdot\dfrac{2x}{x^2+1}}{2\sqrt{1-\ln^2(x^2+1)}}\right]}{(x^2+1)^2\cdot[1-\ln^2(x^2+1)]}=$$

$$=2\cdot\frac{(x^2+1)\left[1-\ln^2(x^2+1)\right]-2x^2\cdot\left[1-\ln^2(x^2+1)\right]+2x^2\cdot\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2\cdot\left[1-\ln^2(x^2+1)\right]\cdot\sqrt{1-\ln^2(x^2+1)}}=$$

$$=2\cdot\frac{x^2-x^2\cdot\ln^2(x^2+1)+1-\ln^2(x^2+1)-2x^2+2x^2\cdot\ln^2(x^2+1)+2x^2\cdot\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2\cdot\left[1-\ln^2(x^2+1)\right]\cdot\sqrt{1-\ln^2(x^2+1)}}$$

$$=2\cdot\frac{\left(x^2-1\right)\cdot\ln^2\left(x^2+1\right)+2x^2\cdot\ln\left(x^2+1\right)-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2\cdot\left[1-\ln^2\left(x^2+1\right)\right]\cdot\sqrt{1-\ln^2\left(x^2+1\right)}}$$

$$f''(x)\ \geq 0\Rightarrow 2\cdot\frac{(x^2-1)\cdot\ln^2(x^2+1)+2x^2\cdot\ln(x^2+1)-x^2+1}{(x^2+1)^2\cdot\left[1-\ln^2(x^2+1)\right]\cdot\sqrt{1-\ln^2(x^2+1)}}\geq 0$$

$$N\geq 0\Rightarrow\ (x^2-1)\cdot\ln^2(x^2+1)+2x^2\cdot\ln(x^2+1)-x^2+1\ \geq 0 \qquad (1)$$

✔ Ai fini dello studio di tale disequazione, consideriamo, nella (1), il segno di uguaglianza; si ottiene l'equazione:

$$(x^2-1)\cdot\ln^2(x^2+1)+2x^2\cdot\ln(x^2+1)-x^2+1\ =0 \qquad (2)$$

effettuando la sostituzione $\ln(x^2+1)=t$, con $t\geq 0$ (in quanto x^2 è una quantità non negativa) $\Rightarrow x^2+1=e^t\Rightarrow x^2=e^t-1$, si ottiene:

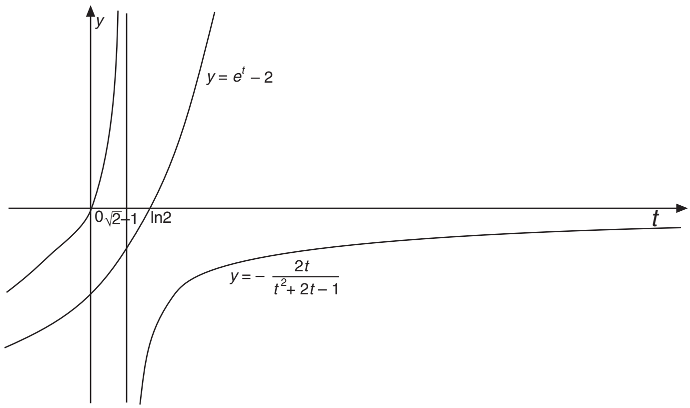
$(e^t-2)\cdot t^2+2(e^t-1)\cdot t-e^t+2=0$, da cui: $(t^2+2t-1)\cdot e^t=2t^2+2t-2$; isolando e^t, si ha:

$$e^t=2\cdot\frac{t^2+t-1}{t^2+2t-1}$$

se al numeratore della frazione si aggiunge e si sottrae t, l'equazione si riscrive nella forma:

$$e^t=2\cdot\frac{t^2+t-1+t-t}{t^2+2t-1}=2\cdot\frac{(t^2+2t-1)-t}{t^2+2t-1}=2-\frac{2t}{t^2+2t-1}\Rightarrow e^t-2=-\frac{2t}{t^2+2t-1}$$

Studiamo graficamente l'equazione ottenuta per $t \geq 0$:



Per $t \geq 0$, si osserva che le due funzioni hanno uguale segno (negativo) soltanto nella striscia di piano $\sqrt{2} - 1 < t < \ln 2$, dove però le due curve non si intersecano, in quanto l'esponenziale è ben al di sopra della curva razionale.

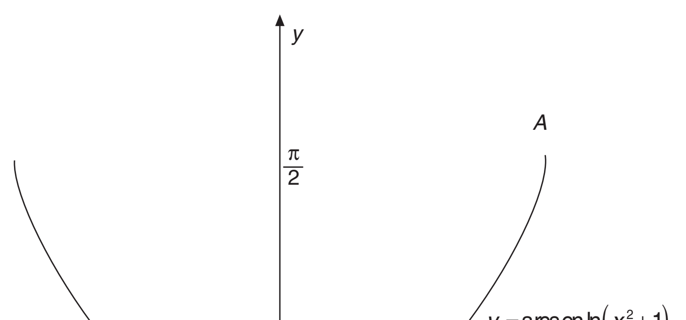
Quindi, le due curve non si intersecano per $t \geq 0$, e ciò esclude l'esistenza di soluzioni dell'equazione (2); ciò significa che la funzione al primo membro della (1), che è continua e non ha zeri, non cambia mai segno, cioè è sempre positiva o sempre negativa; in particolare, per $x = 0$, tale funzione assume il valore $1 > 0$, e ciò assicura che essa è sempre positiva.

✌ In definitiva:

$N \geq 0$ sempre

$D > 0$ per $-\sqrt{e-1} < x < \sqrt{e-1}$

per cui si conclude che la derivata seconda risulta strettamente positiva in $\left]-\sqrt{e-1}, \sqrt{e-1}\right[$, e cioè che la curva rivolge la concavità verso l'alto in tutto il suo campo di esistenza.



Funzione 17: $f(x)=\frac{\sqrt[3]{|x-3|}}{e^x}$ (funzione trascendente)

◆ **Campo di esistenza**

✔ Poiché il denominatore della frazione è sempre positivo e la radice di indice dispari, non vi sono limitazioni al campo di esistenza.

✌ Riassumendo:

$$C.\ E. = R$$

◆ **Eventuali intersezioni con gli assi**

Per $x = 0$, si ha $y = \sqrt[3]{3}$; per $y = 0$, $\frac{\sqrt[3]{|x-3|}}{e^x} = 0$, da cui $x = 3$.

✌ Quindi, la curva interseca l'asse x nel punto $A(3; 0)$ e l'asse y nel punto $B\left(0;\ \sqrt[3]{3}\right)$.

◆ **Studio del segno della funzione**

✔ Il numeratore è una quantità sempre non negativa ed il denominatore è sempre positivo, per cui: $f(x) \geq 0\ \ \forall x \in R$

◆ **Comportamento negli estremi del campo ed eventuali asintoti**

Asintoti verticali

✌ La continuità della funzione in R esclude l'esistenza di asintoti verticali.

Asintoti orizzontali

✔ Poiché la funzione si scompone nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x-3}}{e^x} & \text{per } x \geq 3 \\ \frac{\sqrt[3]{-x+3}}{e^x} & \text{per } x < 3 \end{cases} \tag{1}$$

si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x-3}}{e^x} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{e^{3x}}} = 0$$

invero, per $x \to +\infty$ il monomio e^{3x} è un infinito di ordine superiore rispetto al binomio $x-3$; inoltre:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{-x+3}}{e^x} = +\infty$$

in quanto in $+\infty$ l'esponenziale è infinitesimo.

✌ Quindi, l'asse x è asintoto orizzontale a destra per la curva.

Asintoti obliqui

Poiché a destra si è determinato l'asintoto orizzontale, ricerchiamo l'eventuale asintoto obliquo soltanto a sinistra:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{-x+3}}{e^x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{-x+3}}{x\cdot e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{-x+3}}{\left(\frac{e^x}{1/x}\right)}$$

Il denominatore della frazione in parentesi è infinitesimo, in quanto in $+\infty$ l'esponenziale è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\frac{1}{x}$.

✌ Di conseguenza, $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, e, quindi, non vi sono asintoti obliqui.

◆ **STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA**

Tenendo presenti le (1), si ricava:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}\cdot e^x-\sqrt[3]{x-3}\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} & \text{per } x>3\\[2ex] \dfrac{-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(-x+3)^2}}\cdot e^x-\sqrt[3]{-x+3}\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} & \text{per } x<3\end{cases}$$

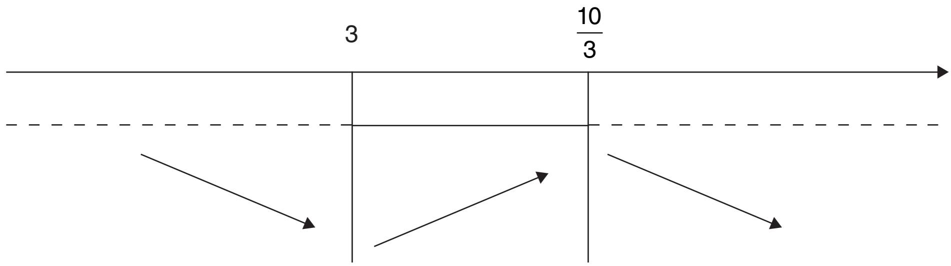
dove si è escluso il punto 3, essendo ivi la funzione non derivabile.

Semplificando, si ottiene:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-3x+10}{3e^x\cdot\sqrt[3]{(x-3)^2}} & \text{per } x>3\\[2ex] \dfrac{3x-10}{3e^x\cdot\sqrt[3]{(-x+3)^2}} & \text{per } x<3\end{cases}$$

✔ Essendo i denominatori entrambi sempre positivi per $x \neq 3$, si ha che, per $x > 3$, $f'(x) \geq 0$ per $-3x + 10 \geq 0$, cioè per $x \leq \frac{10}{3}$; invece, per $x < 3$, $3x - 10 \geq 0$, cioè $x \geq \frac{10}{3}$, mai verificata in $]-\infty, 3[$.

Riassumiamo i risultati:



✌ Si deduce che la funzione è strettamente decrescente per $x < 3$, crescente per $3 < x \le \frac{10}{3}$ e strettamente decrescente per $x > \frac{10}{3}$. In particolare, il punto $A(3;0)$ è di minimo, mentre il punto M di ascissa $\frac{10}{3}$ è di massimo; poiché $f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{\frac{10}{3}-3}}{e^{\frac{10}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}\cdot e^{\frac{10}{3}}}$, si ha $M\left(\frac{10}{3};\ \frac{1}{\sqrt[3]{3}\cdot e^{\frac{10}{3}}}\right)$.

◆ **Comportamento della derivata prima in $x = 3$**

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{3x-10}{3e^x \cdot \sqrt[3]{-x+3}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{-3x+10}{3e^x \cdot \sqrt[3]{(x-3)^2}} = +\infty$$

✌ Dunque, le derivate sinistra e destra in $x = 3$ sono entrambe infinite e di segni opposti, per cui le semitangenti sinistra e destra sono entrambe verticali e di versi opposti; il diagramma presenta in $A(3;0)$ una *cuspide*.

◆ **Studio del segno della derivata seconda**

La derivata prima può scriversi come:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\dfrac{-3x+10}{e^x\cdot(x-3)^{\frac{2}{3}}} & \text{per } x>3 \\[2ex] \dfrac{1}{3}\dfrac{3x-10}{e^x\cdot(-x+3)^{\frac{2}{3}}} & \text{per } x<3 \end{cases}$$

✔ Per $x > 3$, la derivata del denominatore vale:

$$D\left[(x-3)^{\frac{2}{3}}\cdot e^x\right] = \frac{2}{3}(x-3)^{-\frac{1}{3}}\cdot e^x + (x-3)^{\frac{2}{3}}\cdot e^x = e^x\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} + \sqrt[3]{(x-3)^2}\right] = e^x\cdot\frac{3x-7}{3\sqrt[3]{x-3}}$$

utilizzando questo risultato parziale, si ottiene:

$$f''(x)=\frac{1}{3}\frac{-3(x-3)^{\frac{2}{3}}+(3x-10)\cdot\dfrac{3x-7}{3\sqrt[3]{x-3}}}{(x-3)^{\frac{4}{3}}\cdot\left(e^x\right)^2}\cdot e^x=\frac{9x^2-60x+97}{9(x-3)\cdot\sqrt[3]{(x-3)^2}\cdot e^x}$$

✔ Invece, per $x < 3$, la derivata del denominatore vale:

$$D\left[\left(-x+3\right)^{\frac{2}{3}}\cdot e^x\right]=\frac{2}{3}\left(-x+3\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot(-1)\cdot e^x+\left(-x+3\right)^{\frac{2}{3}}\cdot e^x=e^x\cdot\frac{-3x+7}{3\sqrt[3]{-x+3}}$$

utilizzando questo risultato parziale, si ottiene:

$$f''(x)=\frac{1}{3}\frac{3\left(-x+3\right)^{\frac{2}{3}}-\left(3x-10\right)\cdot\dfrac{-3x+7}{3\sqrt[3]{-x+3}}}{\left(-x+3\right)^{\frac{4}{3}}\cdot\left(e^x\right)^2}\cdot e^x=\frac{9x^2-60x+97}{9\left(-x+3\right)\cdot\sqrt[3]{\left(-x+3\right)^2}\cdot e^x}$$

In definitiva:

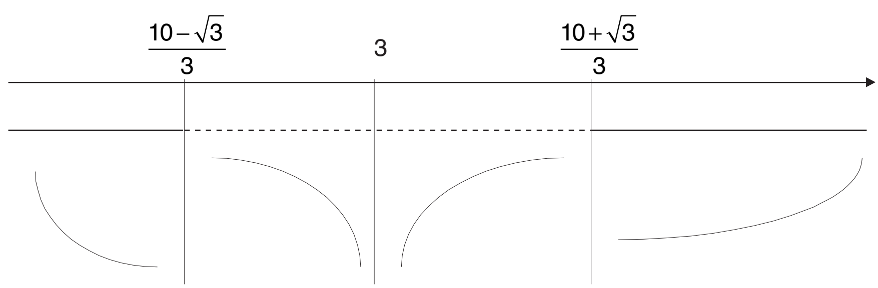
$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{9x^2-60x+97}{9(x-3)\cdot\sqrt[3]{(x-3)^2}\cdot e^x} & \text{per } x>3\\[2ex] \dfrac{9x^2-60x+97}{9(-x+3)\cdot\sqrt[3]{(-x+3)^2}\cdot e^x} & \text{per } x<3\end{cases}$$

Poiché il denominatore risulta sempre positivo sia per $x > 3$ che per $x < 3$, la derivata seconda è non negativa quando tale risulta la quantità al numeratore $9x^2 -60x + 97$.

1. Per $x >3$, $f''(x) \geq 0 \Rightarrow 9x^2 -60x + 97 \geq 0 \Rightarrow x \leq \dfrac{10-\sqrt{3}}{3}$ e $x \geq \dfrac{10+\sqrt{3}}{3}$, ma, essendo il primo estremo minore di 3, deve aversi soltanto $x \geq \dfrac{10+\sqrt{3}}{3}$.

2. Per $x < 3$, $f''(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq \dfrac{10-\sqrt{3}}{3}$, in quanto il secondo estremo $\dfrac{10+\sqrt{3}}{3}$ è maggiore di 3.

Riassumiamo i risultati trovati nel seguente schema:

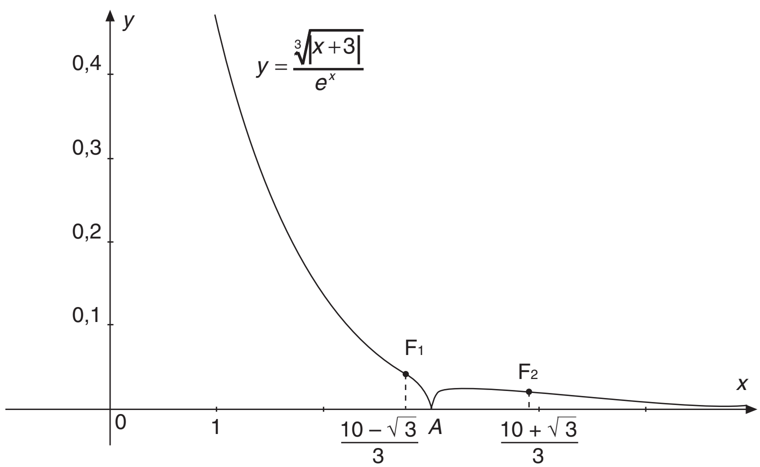


✌ La curva, quindi, è convessa in $\left[\frac{10-\sqrt{3}}{3}, 3\right[$, concava in $\left]3, \frac{10+\sqrt{3}}{3}\right]$ e convessa in $\left]\frac{10-\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$.

Si ha, quindi, un flesso discendente nel punto $F_1\left(\frac{10-\sqrt{3}}{3}; \sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{3}}{3}}\cdot e^{\frac{-10+\sqrt{3}}{3}}\right)$ ed un flesso ascendente nel punto $F_2\left(\frac{10+\sqrt{3}}{3}; \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}\cdot e^{\frac{-10-\sqrt{3}}{3}}\right)$.

✔ Nel grafico di seguito riportato il sistema di riferimento utilizzato è, eccezionalmente, non monometrico, in quanto l'unità di misura adottata sull'asse y risulta molto più ampia di quella relativa all'asse x; ciò allo scopo di rendere meglio visibili le caratteristiche del diagramma intorno al punto di cuspide, che resterebbero poco evidenti se si adottasse un riferimento monometrico.

In ogni caso, occorre tenere presente che, benché non visibile, la curva cresce indefinitamente al decrescere della x, dopo aver intersecato l'asse y nel punto $B(0; 3)$.



Funzione 18: $f(x) = \cosh\sqrt{|x|-1}$ (funzione trascendente)

◆ **Campo di esistenza**

Deve aversi: $|x|-1 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow x \leq -1$ e $x \geq 1$.

✌ Quindi:

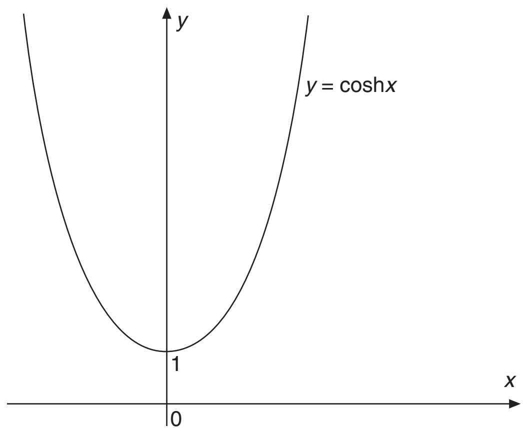
$$C.\,E. = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$$

◆ **Simmetrie**

La funzione è pari, per cui può essere studiata nell'intervallo $[1, +\infty[$.

◆ **Eventuali intersezioni con gli assi**

✔ La funzione non è definita nell'origine, quindi la curva non interseca l'asse *y*; inoltre, il coseno iperbolico è una funzione sempre positiva, come si evince dal seguente grafico:



per cui il diagramma non interseca mai l'asse *x*.

✌ Si deduce che non vi sono intersezioni con gli assi cartesiani.

◆ **Studio del segno della funzione**

La funzione è sempre positiva, in quanto tale è il coseno iperbolico per ogni *x*; quindi, la curva è posta tutta al di sopra dell'asse *x*.

◆ **Comportamento negli estremi del campo ed eventuali asintoti**

Asintoti verticali

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \cosh 0 = 1$$

✌ la funzione è continua nel punto $x = 1$ e non presenta asintoti verticali; la curva 'esce' dal punto $A(1;\,1)$ con pendenza che verrà determinata di seguito.

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \cosh\sqrt{x-1} = +\infty$$

✌ Si conclude che non vi sono asintoti orizzontali.

Asintoti obliqui

Dalla relazione $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cosh\sqrt{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{e^{\sqrt{x-1}} + e^{-\sqrt{x-1}}}{2}}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x-1}} + e^{-\sqrt{x-1}}}{x} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x-1}}}{x}\right) = +\infty$$

✔ infatti, per $x \to +\infty$, il primo dei due limiti è $+\infty$, essendo il numeratore $e^{\sqrt{x-1}}$ un infinito di ordine superiore rispetto al denominatore x, mentre il secondo è nullo, essendo il numeratore $e^{-\sqrt{x-1}}$ infinitesimo ed il denominatore x infinito.

✌ Si conclude che non vi sono asintoti obliqui.

◆ **Studio del segno della derivata prima**

Per $x > 1$, si ha:

$$f'(x) = \operatorname{senh}\sqrt{x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}} \geq 0$$

✌ Nell'intervallo considerato, sia il numeratore che il denominatore sono sempre positivi, per cui la derivata prima risulta positiva e la curva strettamente crescente; per simmetria, essa sarà strettamente descrescente per $x < -1$.

◆ **Comportamento della derivata prima in $x = 1$**

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

effettuando la sostituzione $\sqrt{x-1} = t$ e tenendo presente che per $x \to 1$, t tende a 0, si ricava:

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \frac{1}{2}\lim_{t\to0^+} \frac{\operatorname{senh} t}{t}$$

tale limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$; applicando la regola di L'Hospital, si ottiene:

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \frac{1}{2}\lim_{t\to0^+} \frac{\cosh t}{1} = \frac{1}{2}$$

✌ Quindi, la curva 'esce' dal punto $A(1; 1)$ con pendenza $\theta = \arctan\frac{1}{2}$ = 26° 33' 54''.

◆ **Studio del segno della derivata seconda**

Per $x > 1$, si ha:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\cosh\sqrt{x-1}\,\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,\sqrt{x-1} - \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x-1}\cosh\sqrt{x-1} - \operatorname{senh}\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt{x-1}}$$

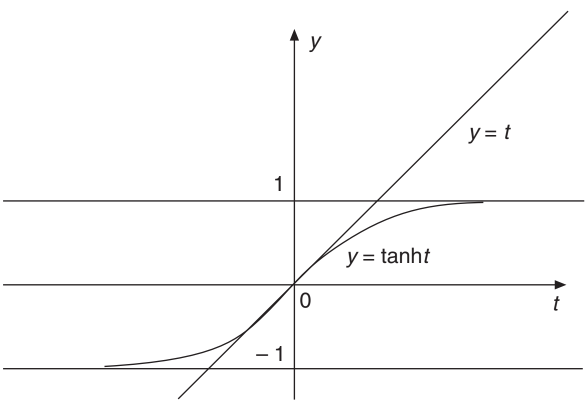
$$f''(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x-1}\cdot\cosh\sqrt{x-1} - \operatorname{senh}\sqrt{x-1}}{(x-1)\cdot\sqrt{x-1}} \geq 0$$

$$N \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1}\cdot\cosh\sqrt{x-1} - \operatorname{sen}h\sqrt{x-1} \geq 0;$$

effettuando la sostituzione $\sqrt{x-1} = t$, con $t > 0$ (essendo $x > 1$), si ha $t\cdot\cosh t - \operatorname{senh} t \geq 0$, da cui, dividendo per la quantità positiva $\cosh t$, si ottiene:

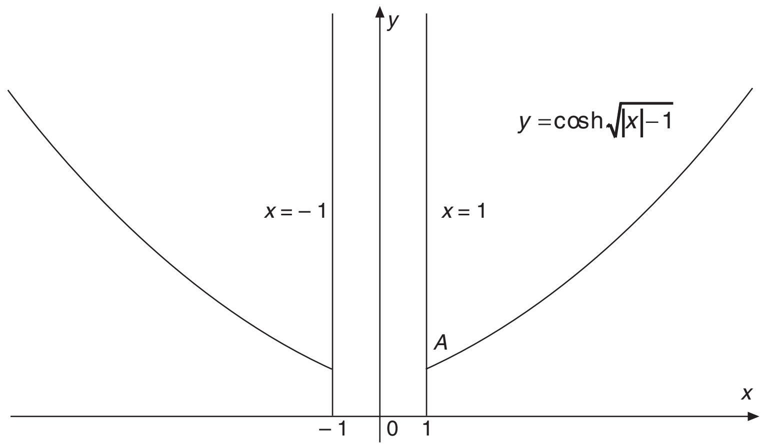
$$t \leq \frac{\operatorname{senh} t}{\cosh t} \stackrel{def}{=} \tanh t$$

Tracciando il grafico della retta $y = t$ e della funzione $y = \tanh t$, si osserva facilmente che la retta e la curva iperbolica non si intersecano, in quanto la retta cresce rapidamente e si porta al di sopra dell'asintoto orizzontale $y = 1$ della curva iperbolica, posta tutta al di sotto di tale asintoto.



Essendo, per $t > 0$, la tangente iperbolica sempre al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante, la disequazione in studio è sempre verificata nell'intervallo considerato; poiché, poi, il denominatore della derivata seconda, nello stesso intervallo, è sempre positivo, tale risulta anche la $f''(x)$.

✌ Dunque, la curva rivolge sempre la concavità verso l'alto.



Funzione 19: $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$ (funzione trascendente)

◆ **CAMPO DI ESISTENZA**

Deve essere:

$1+e^{-x}>0$

Essendo la funzione esponenziale e^{-x} sempre positiva, la disequazione è sempre verificata.

✌ Riassumendo:

$$C.\,E. = R$$

◆ **EVENTUALI INTERSEZIONI CON GLI ASSI**

✔ Per $x = 0$, si ha $y = \ln 2$;
per $y = 0$, si ha $\ln(1+e^{-x})=0 \Rightarrow (1+e^{-x})=1 \Rightarrow e^{-x}=0$, mai verificata.

✌ Quindi, la curva interseca l'asse *y* nel punto *A*(0; ln2) e non interseca l'asse *x*.

◆ **STUDIO DEL SEGNO DELLA FUNZIONE**

$f(x)\geq 0 \Rightarrow \ln\left(1+e^{-x}\right)\geq 0 \Rightarrow 1+e^{-x}\geq 1 \Rightarrow e^{-x}\geq 0$, sempre.

Dunque:

$f(x)\geq 0 \quad \forall x \in R$

◆ **COMPORTAMENTO NEGLI ESTREMI DEL CAMPO ED EVENTUALI ASINTOTI**

Asintoti verticali

✌ Essendo la funzione continua in *R*, il diagramma è privo di asintoti verticali.

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln 1=0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=+\infty$$

✌ L'asse *x* è asintoto orizzontale a destra

Asintoti obliqui

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{x}$$

✔ Poiché per $x\to-\infty$, $e^{-x}\to+\infty$, la costante 1 dell'argomento del logaritmo naturale può essere trascurata rispetto all'esponenziale, per cui, in base al principio di sostituzione degli infiniti:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{-x}\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)+x\right]$$

Tale limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$, si ha:

$$q=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)+\ln e^{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\ln\left[\left(1+e^{-x}\right)\cdot e^{x}\right]=\ln\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x}+1\right)=\ln 1=0$$

La retta $y=-x$ è asintoto obliquo a sinistra.

◆ **Studio del segno della derivata prima**

$$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$f'(x)\geq 0\Rightarrow-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\geq 0$$

$N\geq 0\Rightarrow -e^{-x}\geq 0$ mai

$D>0\Rightarrow 1+e^{-x}>0$

La derivata prima è, pertanto, sempre negativa, per cui la curva è strettamente decrescente in R.

◆ **Studio del segno della derivata seconda**

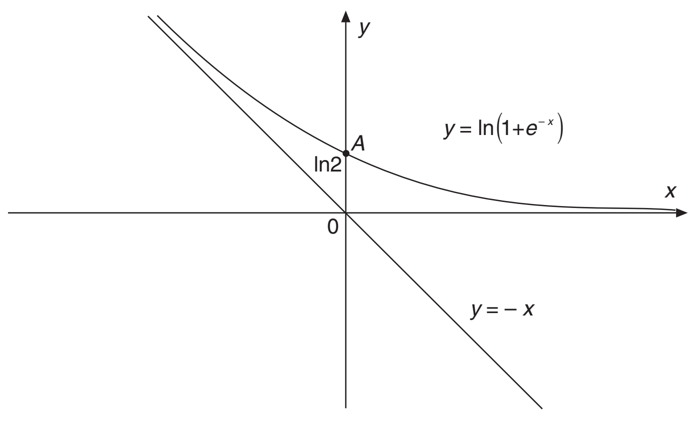
$$f''(x)\Rightarrow-\frac{-e^{-x}\cdot\left(1+e^{-x}\right)-e^{-x}\cdot\left(-e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^{2}}=-\frac{-e^{-x}-e^{-2x}+e^{-2x}}{\left(1+e^{-x}\right)^{2}}=\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^{2}}$$

$$f''(x)\geq 0\Rightarrow\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^{2}}\geq 0$$

$N\geq 0\Rightarrow e^{-x}\geq 0\quad\forall x\in R$

$D>0$ sempre

La derivata seconda è positiva in R per cui la curva rivolge ovunque la concavità verso l'alto.



Funzione 20: $f(x)=x^3\cdot e^{-x^3}$ (funzione trascendente)

◆ **Campo di esistenza**

✌ La funzione è continua ovunque, quindi:

$$C.\,E. = R$$

◆ **Eventuali intersezioni con gli assi**

Per $x = 0$, si ha $y = 0$;

per $y = 0$, $x^3\cdot e^{-x^3}=0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$.

✌ La curva passa per l'origine e non interseca ulteriormente gli assi cartesiani.

◆ **Studio del segno della funzione**

$f(x) \geq 0 \Rightarrow x^3\cdot e^{-x^3} \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

La funzione è strettamente positiva per $x > 0$ e strettamente negativa per $x < 0$, sicché il diagramma giace nel primo e nel terzo quadrante.

◆ **Comportamento negli estremi del campo ed eventuali asintoti**

Asintoti verticali

La curva, essendo continua in R, non presenta asintoti verticali.

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3\cdot e^{-x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^3}}{\left(\dfrac{1}{x^3}\right)}$$

Posto $t = x^3$ e tenendo presente che $t \to +\infty$ per $x \to +\infty$, si ricava:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^3}}{\left(\dfrac{1}{x^3}\right)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{\left(\dfrac{1}{t}\right)}=0$$

infatti, per $t\to+\infty$ il numeratore è un infinitesimo di ordine infinito, mentre il denominatore è un infinitesimo del primo ordine. Inoltre:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3\cdot e^{-x^3}=-\infty$$

✌ Dunque, l'asse x è asintoto orizzontale a destra.

Asintoti obliqui

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\cdot e^{-x^3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2\cdot e^{-x^3}=+\infty$$

✌ Perciò, la curva è priva di asintoti obliqui.

◆ **Studio del segno della derivata prima**

$$f'(x)=3x^2\cdot e^{-x^3}+\left(-3x^2\right)\cdot e^{-x^3}\cdot x^3=3x^2\cdot e^{-x^3}(1-x^3)$$

$$f'(x)\geq 0\Rightarrow 3x^2\cdot e^{-x^3}\left(1-x^3\right)\geq 0\Rightarrow 1-x^3\geq 0\Rightarrow x^3\leq 1\Rightarrow x\leq 1$$

✌ Dunque, la derivata prima è non negativa in $]-\infty, 1]$; in particolare, essa si annulla per $x = 0$ e per $x = 1$. Ne consegue che la funzione è strettamente crescente negli intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, 1[$, strettamente decrescente in $]1, +\infty[$; essa è stazionaria nell'origine e presenta un massimo nel punto $M\left(1, \frac{1}{e}\right)$, essendo $f(1) = \frac{1}{e}$.

L'origine è un punto a tangente orizzontale, la cui natura va chiarita attraverso lo studio delle derivate successive.

◆ **Studio del segno della derivata seconda**

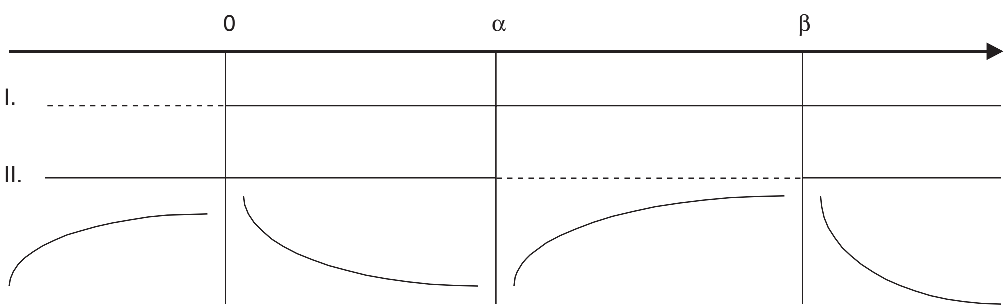
Poiché $f'(x)=3\left(x^2-x^5\right)\cdot e^{-x^3}$, si ha:

$$f''(x)=3\left[\left(2x-5x^4\right)\cdot e^{-x^3}+\left(x^2-x^5\right)\cdot\left(-3x^2\right)\cdot e^{-x^3}\right]=3x\cdot e^{-x^3}\left(3x^6-8x^3+2\right)$$

$$f''(x)\geq 0\Rightarrow 3x\cdot e^{-x^3}\cdot\left(3x^6-8x^3+2\right)\geq 0$$

I. $3x\cdot e^{-x^3}\geq 0\quad\forall x\geq 0$

II. $3x^6-8x^3+2\geq 0\Rightarrow\quad x^3\leq\frac{4-\sqrt{10}}{3}$ e $x^3\geq\frac{4+\sqrt{10}}{3}\quad\Rightarrow\quad x\leq\alpha=\sqrt[3]{\frac{4-\sqrt{10}}{3}}$ e $x\geq\beta=\sqrt[3]{\frac{4+\sqrt{10}}{3}}$



La curva presenta:

1. un flesso ascendente nell'origine con tangente orizzontale (asse x);
2. un flesso discendente nel punto $F_1\left(\sqrt[3]{\dfrac{4-\sqrt{10}}{3}};\ \dfrac{4-\sqrt{10}}{3}\cdot e^{\frac{-4+\sqrt{10}}{3}}\right)$;
3. un flesso ascendente nel punto $F_2\left(\sqrt[3]{\dfrac{4+\sqrt{10}}{3}};\ \dfrac{4+\sqrt{10}}{3}\cdot e^{-\frac{4+\sqrt{10}}{3}}\right)$.

Per determinare le tangenti inflessionali in F_1 e in F_2, calcoliamo le quantità $f'(\alpha)$ e $f'(\beta)$:

$$f'(\alpha)=f'\left(\sqrt[3]{\frac{4-\sqrt{10}}{3}}\right)=3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{4-\sqrt{10}}{3}\right)^2}\cdot e^{\frac{-4+\sqrt{10}}{3}}\left(1-\frac{4-\sqrt{10}}{3}\right)=\left(\sqrt{10}-1\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{26-8\sqrt{10}}{9}}e^{\frac{-4+\sqrt{10}}{3}}$$

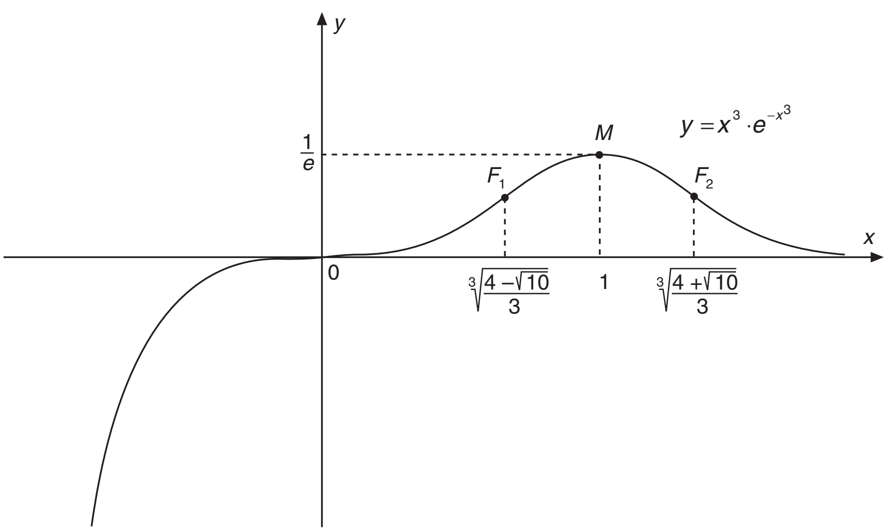
$$f'(\beta)=f'\left(\sqrt[3]{\frac{4+\sqrt{10}}{3}}\right)=3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{4+\sqrt{10}}{3}\right)^2}\cdot e^{-\frac{4+\sqrt{10}}{3}}\left(1-\frac{4+\sqrt{10}}{3}\right)=-\left(\sqrt{10}+1\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{26+8\sqrt{10}}{9}}e^{-\frac{4+\sqrt{10}}{3}}$$

L'equazione della tangente in F_1 vale: $y-f(\alpha)=f'(\alpha)\cdot(x-\alpha)$; cioè:

$$y-\frac{4-\sqrt{10}}{3}\cdot e^{\frac{-4+\sqrt{10}}{3}}=\left(\sqrt{10}-1\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{26-8\sqrt{10}}{9}}\cdot e^{\frac{-4+\sqrt{10}}{3}}\cdot\left(x-\sqrt[3]{\frac{4-\sqrt{10}}{3}}\right)$$

mentre quella della tangente in F_2 vale: $y-f(\beta)=f'(\beta)\cdot(x-\beta)$; ossia:

$$y-\frac{4+\sqrt{10}}{3}\cdot e^{-\frac{4+\sqrt{10}}{3}}=-\left(\sqrt{10}+1\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{26+8\sqrt{10}}{9}}\cdot e^{-\frac{4+\sqrt{10}}{3}}\left(x-\sqrt[3]{\frac{4+\sqrt{10}}{3}}\right)$$



Funzione 21: $f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ (funzione irrazionale)

◆ **Campo di esistenza**

Deve essere: $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1$ e $x \geq 3$.

✌ Riassumendo:

$$C.\,E. =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$$

◆ **Eventuali intersezioni con gli assi**

La funzione non è definita nell'origine, quindi non interseca l'asse y; per $y = 0$, si ha $x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0$; tale equazione irrazionale è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = (x-2)^2 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ x \leq -1 \cup x \geq 3 \end{cases}$$

✌ Poiché $\frac{7}{2} \in [3, +\infty[$, tale soluzione è accettabile, quindi la curva interseca l'asse x nel punto $A\left(\frac{7}{2}; 0\right)$.

◆ **Studio del segno della funzione**

✔ Poiché l'espressione irrazionale $\sqrt{x^2 - 2x - 3}$ è non negativa, la curva giace tutta nel semipiano posto al di sotto della retta di equazione $y = x - 2$.

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} \leq -x + 2$$

disequazione irrazionale equivalente al sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 \leq (x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \cup x \geq 3 \\ x \geq 2 \\ x^2 - 2x - 3 \leq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x \leq -1 \cup x \geq 3) \cap (x \geq 2) \\ x \leq \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow 3 \leq x \leq \frac{7}{2}$$

✌ onde la funzione è non negativa nell'intervallo $\left[3, \frac{7}{2}\right]$, negativa altrove.

◆ **EVENTUALI ASINTOTI**

Asintoti verticali

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\left(x-2-\sqrt{x^2-2x-3}\right) = f(-1) = -3$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(x-2-\sqrt{x^2-2x-3}\right) = f(3) = 1$$

✌ Dunque, la funzione è continua nei punti $x = -1$ e $x = 3$, per cui la curva è priva di asintoti verticali; essa 'esce' dal punto $B(-1; -3)$ ed 'entra' nel punto $C(3; 1)$ con pendenze che verranno determinate attraverso lo studio della derivata prima.

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x-2-\sqrt{x^2-2x-3}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(x-2-\sqrt{x^2-2x-3}\right)\cdot\left(x-2+\sqrt{x^2-2x-3}\right)}{x-2+\sqrt{x^2-2x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\left[(x-2)^2-\left(x^2-2x-3\right)\right]}{x-2+\sqrt{x^2-2x-3}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-2x+7}{x-2+\sqrt{x^2-2x-3}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x\cdot\left(-2+\frac{7}{x}\right)}{x\cdot\left(1-\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{-2+\frac{7}{x}}{1-\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \frac{-2}{1+1} = -1$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(x-2-\sqrt{x^2-2x-3}\right) = -\infty$$

✌ Quindi, la retta $y = -1$ è asintoto orizzontale a destra.

Asintoti obliqui

✔ Tenendo presente che, per $x < 0$, $\sqrt{x^2-2x-3} = |x|\cdot\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = -x\cdot\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}$, si ha:

$$m = \lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x-2-\sqrt{x^2-2x-3}}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x\cdot\left(1-\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}\right) = 1 + 1 = 2$$

$$q = \lim_{x\to -\infty}\left[f(x)-m\cdot x\right] = \lim_{x\to -\infty}\left[x-2-\sqrt{x^2-2x-3}-2x\right] = -\lim_{x\to -\infty}\left[x+2+\sqrt{x^2-2x-3}\right] =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x-3}+x+2\right)\cdot\left[\sqrt{x^2-2x-3}-(x+2)\right]}{\sqrt{x^2-2x-3}-(x+2)} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[x^2-2x-3-(x+2)^2\right]}{\sqrt{x^2-2x-3}-x-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6x+7}{\sqrt{x^2-2x-3}-x-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(6+\frac{7}{x}\right)}{x\cdot\left(-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-1+\frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{6+\frac{7}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-1+\frac{2}{x}} = \frac{6}{-1-1} = -3$$

✌ Si riconosce, allora, che la retta di equazione $y = 2x - 3$ è asintoto obliquo a sinistra.

◆ **Studio del segno della derivata prima**

$$f'(x)=1-\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}}=1-\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}=\frac{\sqrt{x^2-2x-3}-x+1}{\sqrt{x^2-2x-3}} \quad \text{con } x<-1 \text{ e } x>3$$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2-2x-3}-x+1\geq 0\\ x<-1\\ x>3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2-2x-3}\geq x-1\\ x<-1\\ x>3\end{cases}$$

sistema equivalente alla seguente coppia di sistemi:

$$\text{I)}\begin{cases}x^2-2x-3\geq(x-1)^2\\ x-1\geq 0\\ x<-1\\ x>3\end{cases} \cup \text{ II)}\begin{cases}x^2-2x-3>0\\ x-1<0\end{cases}$$

il sistema I), risolto, fornisce:

$$\begin{cases}-3\geq -1 \text{ mai}\\ x\geq 1\\ x<-1\\ x>3\end{cases}$$

cioè, non ammette soluzioni; dal sistema II) si ricava, invece:

$$\begin{cases}x<-1\cup x>3\\ x<1\end{cases} \Rightarrow \left[(x<-1)\cup(x>3)\right]\cap(x<1) \Rightarrow x<-1$$

✌ In definitiva, la derivata prima è strettamente positiva per $x < -1$ e strettamente negativa per $x > 3$; la curva, quindi, è strettamente crescente per $x < -1$ e strettamente decrescente per $x > 3$.

◆ **Comportamento della derivata prima in $x = -1$ e $x = 3$**

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}-x+1}{\sqrt{x^2-2x-3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}-x+1}{\sqrt{x^2-2x-3}} = -\infty$$

✌ Si desume, allora, che i punti $B(-1; -3)$ e $C(3; 1)$ sono a tangente verticale.

◆ **Studio del segno della derivata seconda**

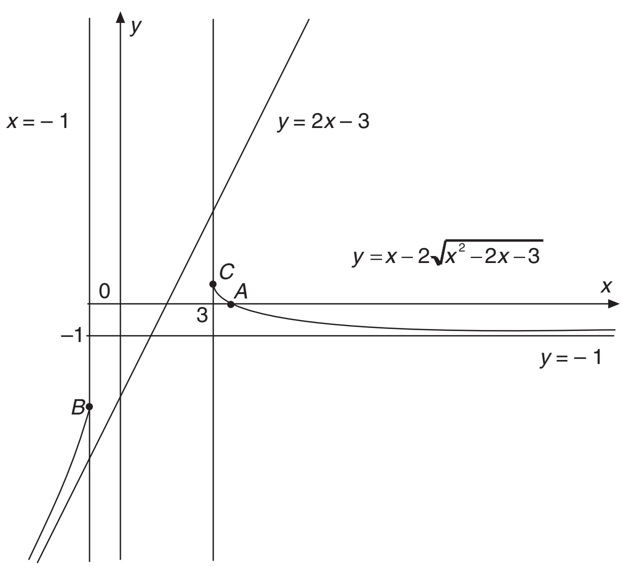
$$f''(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}-1\right)\cdot\sqrt{x^2-2x-3} - \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}\cdot\left[\sqrt{x^2-2x-3}-(x-1)\right]}{x^2-2x-3} =$$

$$= \frac{x-1-\sqrt{x^2-2x-3}-(x-1)+\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x-3}}}{x^2-2x-3} =$$

$$= = \frac{-x^2+2x+3+x^2-2x+1}{(x^2-2x-3)\cdot\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{4}{(x^2-2x-3)\cdot\sqrt{x^2-2x-3}}$$

con $x < -1$ e $x > 3$.

✌ È facile riconoscere, allora, che la derivata seconda è strettamente positiva per x < –1 e x > 3, e che, quindi la curva rivolge sempre la concavità verso l'alto.



✔ Si poteva osservare, fin dall'inizio, che la funzione rappresenta un ramo di conica; invero, dall'equazione $y = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3}$, si ricava $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = x - 2 - y$; da cui, quadrando:

$x^2 - 2x - 3 = x^2 + 4 + y^2 - 4x - 2xy + 4y$, e, raccogliendo:

$$y^2 - 2xy - 2x + 4y + 7 = 0 \qquad (1)$$

la quale è l'equazione di un'iperbole, di cui, la nostra funzione rappresenta il ramo posto al di sotto dell'asse di simmetria $y = x - 2$.

Se si esplicita la variabile x, si ottiene:

$$x = \frac{y^2 + 4y + 7}{2(y+1)} \qquad (2)$$

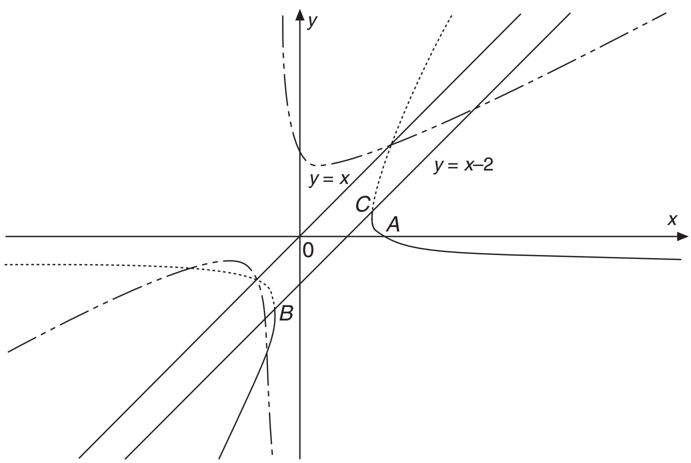
Allora, il diagramma della funzione:

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 4x + 7}{2(x+1)} \qquad (3)$$

inversa locale della f in $]-\infty, -1]$ e in $[3, +\infty[$, ribaltato rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante coincide con quello dell'iperbole rappresentata dalla (1); in particolare, la restrizione di tale diagramma al solo ramo posto al di sotto dell'asse di simmetria della conica, di equazione $y = x - 2$, coincide con la curva rappresentata dalla funzione f.

Si delinea, in tal modo, una via alternativa allo studio della funzione f, realizzabile attraverso lo studio della funzione razionale (2) ed il ribaltamento della curva ottenuta rispetto alla bisettrice $y = x$.

Nel grafico che segue, si riportano il diagramma della (3), quello simmetrico rispetto alla bisettrice $y = x$, che rappresenta l'iperbole (1), e la retta $y = x - 2$.



$$y = \frac{x^2 + 4x + 7}{2(x+1)}$$

$$y^2 - 2xy - 2x + 4y + 7 = 0$$
(Iperbole)

$$y = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$