

punto**exe**

L'esame di
**Calcolo delle probabilità
e Statistica**

Probabilità e Statistica per le scienze e l'ingegneria

-
- **Calcolo delle probabilità**
 - **Teoria delle variabili aleatorie**
 - **Modelli per variabili aleatorie discrete e continue**
 - **Campionamento e distribuzioni campionarie**
 - **Teoria della stima**
 - **Test parametrici e non parametrici**
 - **Controllo della qualità**

Copyright © 2005 Esselibri S.p.A.
Via F. Russo, 33/D
80123 Napoli

Azienda con sistema qualità certificato ISO 14001: 2003

Tutti i diritti riservati.

È vietata la riproduzione anche parziale e con qualsiasi mezzo
senza l'autorizzazione scritta dell'editore.

Prima edizione: settembre 2005

Pt10 - Probabilità e Statistica per le scienze e l'ingegneria
ISBN 88-513-0304-5

Ristampe

8 7 6 5 4 3 2 1 2005 2006 2007 2008

Questo volume è stato stampato presso:

Officina Grafica Iride

Via. Prov.le Arzano-Casandrino, VII Trav., 24 - Arzano (NA)

Della stessa collana:

- Pt1** Limiti, continuità, calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale
- Pt2** Studio di funzioni
- Pt3** Integrali di funzioni di una variabile reale
- Pt4** Serie numeriche
- Pt5** Successioni e serie di funzioni
- Pt6** Limiti, continuità, calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali
- Pt7** Integrali di funzioni di due o più variabili reali
- Pt8** Equazioni differenziali
- Pt10/1** Esercizi svolti di Probabilità e Statistica per le scienze e l'ingegneria

sistemi editoriali 

Professionisti, tecnici e imprese
Gruppo Editoriale **Esselibri - Simone**

Coordinamento redazionale: *Carla Iodice, Stefano Minieri*

Autore: *Carla Iodice*

Tutti i diritti di sfruttamento economico dell'opera appartengono alla Esselibri S.p.A.
(art. 64, D.Lgs. 10-2-2005, n. 30)

Per conoscere le nostre novità editoriali consulta il sito internet:
www.sistemieditoriali.it/puntoexe

Prefazione

La statistica induttiva è la branca della statistica volta a trarre inferenze da un insieme di osservazioni campionarie riguardanti un insieme incognito di osservazioni sulla popolazione.

I responsabili della produzione e della qualità, nel pervenire ad informazioni sulla base di osservazioni empiriche di un processo produttivo, assumono la veste di statistici.

Il presente volume, dunque, è destinato agli studenti delle facoltà di Ingegneria e scientifiche, ma risulterà particolarmente utile anche ai tecnici coinvolti nei processi produttivi.

Dopo un capitolo introduttivo sugli elementi di calcolo delle probabilità, il volume si articola in tre capitoli dedicati, rispettivamente, alla teoria delle variabili aleatorie, in generale, e alle variabili aleatorie discrete e continue (utilizzate come modelli di processi produttivi) in particolare. Segue un capitolo dedicato allo studio sperimentale delle variabili aleatorie. Quindi, i tre successivi capitoli trattano i principali strumenti di statistica induttiva: stima, test d'ipotesi parametrici e non parametrici. L'ultimo capitolo è dedicato, infine, alle tecniche statistiche utilizzate nel controllo di processo.

Ad integrazione dei capitoli sono stati riportati numerosi esempi su fogli di lavoro in Excel.

Il testo, per il sapiente accostamento di esempi applicativi agli argomenti della teoria e per la chiarezza con cui sono esposti i concetti fondamentali, costituisce un'ottima introduzione alla *Probabilità e Statistica per le scienze e l'ingegneria*.

ALFABETO GRECO

A	α	<i>alfa</i>	I	ι	<i>iota</i>	P	ρ	<i>rho</i>
B	β	<i>beta</i>	K	κ	<i>kappa</i>	Σ	σ	<i>sigma</i>
Γ	γ	<i>gamma</i>	Λ	λ	<i>lambda</i>	T	τ	<i>tau</i>
Δ	δ	<i>delta</i>	M	μ	<i>mi</i>	Y	υ	<i>psilon</i>
E	ϵ	<i>epsilon</i>	N	ν	<i>ni</i>	Φ	ϕ	<i>phi</i>
Z	ζ	<i>zeta</i>	Ξ	ξ	<i>xi</i>	X	χ	<i>chi</i>
H	η	<i>eta</i>	O	\omicron	<i>omicron</i>	Ψ	ψ	<i>psi</i>
Θ	θ	<i>theta</i>	Π	π	<i>pi</i>	Ω	ω	<i>omega</i>

INDICE DEI SIMBOLI

$>$	<i>maggiore</i>	\pm	<i>più o meno</i>
$<$	<i>minore</i>	$\exp(.)$	<i>funzione esponenziale</i>
\geq	<i>maggiore o uguale</i>	$\log(.)$	<i>logaritmo in base 10</i>
\leq	<i>minore o uguale</i>	$\ln(.)$	<i>logaritmo neperiano</i>
\neq	<i>diverso da</i>	lim	<i>limite</i>
∞	<i>infinito</i>	∂	<i>derivata parziale</i>
\rightarrow	<i>tende a</i>	\int	<i>integrale</i>
\forall	<i>per ogni</i>	Σ	<i>sommatoria</i>
\sim	<i>distribuito come</i>	Π	<i>produttoria</i>
\equiv	<i>circa uguale a</i>		

ABBREVIAZIONI

$Cov(.,.)$	<i>covarianza</i>
$D(.)$	<i>devianza</i>
$es(.)$	<i>errore standard</i>
$E(.)$	<i>valore medio</i>
v.a.	<i>variabile aleatoria</i>
$Var(.)$	<i>varianza</i>

■ 1 Elementi di calcolo delle probabilità

1. Introduzione

La **statistica** è una scienza, strumentale ad altre, concernente la determinazione dei metodi scientifici da seguire per raccogliere, elaborare e valutare i dati riguardanti l'essenza di particolari fenomeni di massa.

Nell'ambito della metodologia statistica si distinguono, a fini puramente didattici, due filoni fondamentali: la *statistica descrittiva* e la *statistica inferenziale*.

La **statistica descrittiva** è volta alla *rappresentazione*, attraverso mezzi matematici, di uno o più fenomeni reali conducendo lo studio sull'intera popolazione in cui si palesa il fenomeno o i fenomeni oggetto di studio.

La **statistica inferenziale** è volta all'*induzione probabilistica* circa la struttura incognita di una popolazione. Questo filone della statistica si occupa di risolvere il cosiddetto *problema inverso*, ossia, sulla base di osservazioni su un campione di unità selezionate con date procedure dalla popolazione, perviene a soluzioni valide, entro dati livelli di probabilità, anche per la popolazione stessa.

Un numero incalcolabile di fenomeni e processi sono svelati alla mente umana solo comprendendo i principi fondamentali della probabilità.

La **probabilità** è quella parte della matematica che dà un preciso significato al concetto di **incertezza**. Incerto è il risultato di una partita di calcio, così come incerta è la temperatura del giorno seguente. La gente scommette con differenti pronostici sul risultato della partita di calcio, può presumere una temperatura sulla base di quella dei giorni precedenti. In ogni caso, fa delle supposizioni su quello che sarà il risultato di qualche evento.

La **teoria della probabilità** è la scienza che quantifica l'ignoranza umana relativamente ai risultati di eventi. Essa nasce qualche secolo fa ed è fatta risalire al gioco d'azzardo anche se, allo stato attuale, è un fondamentale strumento per una miriade di fenomeni.

Si considerino le scienze attuariali relativamente alla sopravvivenza o mortalità di individui, la meteorologia relativamente alle temperature di un'area geografica, le estrazioni del lotto in relazione all'uscita su una data ruota di uno o più numeri, la politica relativamente alle preferenze esprimibili da un dato gruppo di elettori.

Questi ed altri fenomeni, per interessare la teoria della probabilità, devono essere **incerti nei risultati** ed essere **ripetibili**.

2. Evoluzione storica della statistica

Nell'evoluzione storica della statistica si è soliti individuare quattro fasi distinte.

Nella **prima fase**, il cui inizio si può far coincidere con le $\Pi\omicron\lambda\iota\tau\epsilon\iota\alpha$ di Aristotele, l'interesse della statistica venne rivolto essenzialmente agli aspetti notevoli degli Stati grazie agli sforzi iniziali (XV e XVI secolo) di studiosi italiani, tra cui vanno ricordati F. Sansovino (*Del governo e amministrazione di diversi regni e repubbliche*, Venezia 1567) e G. Botero (*Le relazioni universali*, 1593). Tali studi iniziali vennero approfonditi in Germania ed Olanda, raggiungendo il massimo sviluppo nel XVII e XVIII secolo nelle università tedesche.

La **seconda fase** iniziò nel XVII secolo in Inghilterra, e fu detta degli *aritmetici politici*, poiché l'interesse degli studiosi era concentrato sull'osservazione numerica di nascite, morti ed altri fenomeni che oggi sono detti *demografici*. Tra i massimi esponenti di questa scuola vanno ricordati J.B.J. Fourier e T.R. Malthus, che riapplicarono all'aritmetica politica il termine *statistica*, usato in precedenza per l'analisi delle organizzazioni sociali.

La **fase successiva** è caratterizzata dall'applicazione sistematica del calcolo della probabilità agli studi statistici. Nel 1812 infatti appare la *Théorie analytique des probabilités* di P.S. Laplace, in cui il calcolo delle probabilità ricevette la prima sistemazione teorica. In tale lavoro Laplace si occupò di due importanti problemi teorici, ossia lo scostamento, in un numero limitato di prove, della frequenza empirica di un fenomeno dalla probabilità teorica e l'approssimazione con cui una frequenza empirica calcolata su un adeguato numero di prove si avvicina alla corrispondente probabilità teorica, esistente ma sconosciuta. Tali risultati, di natura eminentemente teorica, vennero impiegati da Laplace per risolvere problemi di natura pratica, quali, ad esempio, la determinazione della popolazione di un paese a partire dai tassi di natalità rilevati in alcune sue zone o regioni. Altri importanti esponenti di questa fase furono F. Galton e K. Pearson, padri dello studio dei legami esistenti tra fenomeni aleatori (o casuali) e J. Quetelet, iniziatore dell'antropometria.

L'**ultima fase** è quella che vede la netta separazione della statistica metodologica e matematica da una parte e della statistica applicata dall'altra.

3. Eventi ed algebra di Boole

In stretto parallelismo con l'algebra di Boole, l'**algebra degli eventi** studia, tramite l'utilizzo di simboli e di operazioni, le relazioni tra gli eventi e le loro proprietà.

Prima di spiegare il concetto di evento esplicitiamo il concetto di prova.

Per **prova** si intende un esperimento soggetto ad incertezza. Affinché l'esperimento interessi il calcolo delle probabilità deve soddisfare le seguenti condizioni:

- tutti i possibili risultati devono essere noti a priori;
- il risultato di una particolare prova deve essere incognito;
- l'esperimento può essere reiterato sotto date condizioni.

Esempi classici di prove sono forniti dal lancio di una moneta, dall'estrazione di una pallina da un'urna, etc. L'esperimento può suddividersi in **sottoprove**, ad esempio l'estrazione di due palline da un'urna è una prova consistente in due sottoprove che sono, rispettivamente, l'estrazione della prima e della seconda pallina.

Siccome è praticamente impossibile circoscrivere a date categorie tutte le prove possibili, si ricorre ad una schematizzazione che riesce a comprendere gran parte degli esperimenti. In generale, l'**estrazione** consiste nella individuazione di un insieme di unità statistiche da una popolazione tramite un procedimento casuale. Lo schema cui si fa riferimento è quello della **estrazione di una o più palline da un'urna**. Si consideri un'urna contenente palline uguali ma che differiscono per qualche particolare come il colore. Le modalità secondo cui sono estratte le palline successive alla prima si distinguono in due tipologie:

- **estrazione con ripetizione** (o **bernoulliana**) se, una volta estratta, la pallina è rimessa nell'urna e quindi può essere riestratta non alterandosi ogni volta la composizione dell'urna;
- **estrazione senza ripetizione** (o **in blocco**) se, una volta estratta, la pallina non è rimessa nell'urna, per cui ciascuna pallina può essere estratta una sola volta.

Per **evento** si intende uno dei possibili risultati di una prova. Nella prova «lancio di un dado non truccato», un evento è dato dal numero rappresentato sulla faccia in alto del dado dopo il lancio. Uno dei possibili risultati è l'evento «faccia con 1 punto», gli altri sono gli eventi «faccia con 2 punti», ..., «faccia con 6 punti».

L'insieme di tutti i possibili risultati di una prova è denominato **spazio campione** (indicato con Ω) mentre i suoi elementi sono denominati **punti campione**.

Si consideri un esperimento consistente nel lancio di un dado non truccato. Siano E_1 l'evento «faccia con 1 punto», E_2 l'evento «faccia con 2 punti», ..., E_6 l'evento «faccia con 6 punti», lo spazio campione è dato dall'insieme $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_6\}$, i punti campione sono gli elementi E_1, E_2, \dots, E_6 .

Uno spazio campione si dice:

- **discreto** se è costituito da un numero finito o da una infinità numerabile di punti campione, un esempio di spazio discreto è fornito dal duplice lancio di un dado non truccato, in cui i punti campione sono (E_1, E_1) , (E_1, E_2) , (E_1, E_3) , ..., (E_6, E_5) , (E_6, E_6) ;
- **continuo** se è costituito da un'infinità non numerabile di punti campione, un esempio di spazio continuo è fornito dalle diverse misurazioni dell'altezza di un individuo, o della temperatura di un ambiente.

Le definizioni che seguono sono mutuete dall'algebra degli insiemi, detta anche **algebra di Boole**.

Se per l'evento A vale la relazione di uguaglianza $A = \Omega$, allora gli eventi di A necessariamente si verificano. L'**insieme vuoto** è l'insieme senza alcun elemento ed è denotato con il simbolo \emptyset , per cui, se vale la relazione $A = \emptyset$, allora gli eventi in A non si verificano, ed A è l'**evento impossibile** nel senso che non può mai essere il risultato di una prova.

Le operazioni tra insiemi sono illustrate dai **diagrammi di Venn**, in cui ogni insieme è delimitato da una porzione di piano racchiusa da una figura. Per analogia, tale rappresentazione è utilmente adoperata per illustrare relazioni ed operazioni dell'algebra degli eventi. Nei diagrammi di Venn lo spazio campione è rappresentato generalmente da un rettangolo, all'interno del quale si rappresentano altre figure rappresentanti i diversi eventi.

Le operazioni tra eventi, mutuete dalla teoria degli insiemi, sono le seguenti: *unione*, *negazione*, *intersezione*.

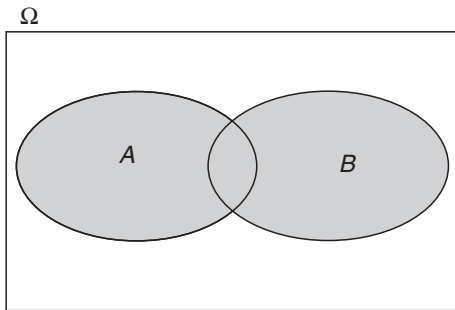
3.1 Unione (somma logica)

Siano A e B due eventi, si dice **unione** di A e B , e si denota con il simbolo:

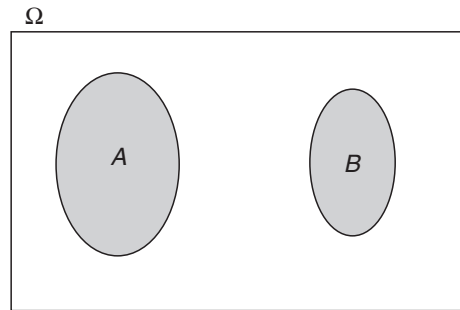
$$A \cup B$$

(dove \cup è il simbolo di *unione*), l'evento C che si verifica quando si verifica **almeno** uno dei due eventi A e B , in altre parole se si verifica A , B o se si verificano A e B contemporaneamente.

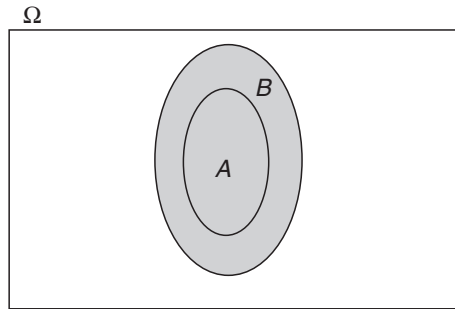
La figura seguente rappresenta, nell'area ombreggiata, tre possibili situazioni di unione di A e B :



$$A \cup B$$



$$A \cup B$$



$$A \cup B = B \text{ quando } A \subset B$$

L'operazione di unione di eventi si può estendere anche ad un numero finito o numerabile di eventi. Pertanto, siano E_1, E_2, \dots, E_n , una raccolta di eventi, si ha che:

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$$

è l'evento unione degli eventi E_1, E_2, \dots, E_n e si verifica se si verifica almeno uno degli eventi $E_i, i = 1, 2, \dots, n$.

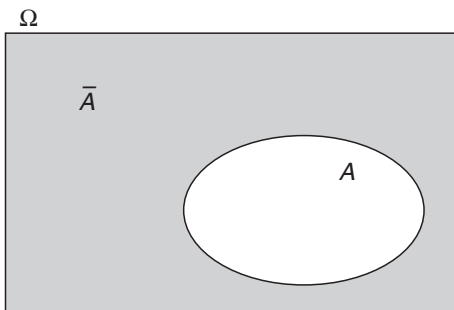
Dall'operazione di unione di due o più eventi è possibile trarre, **in prima approssimazione**, le due definizioni seguenti:

- **evento elementare** è quello che non può essere costituito dall'unione di altri eventi elementari;
- **evento composto** è quello che è costituito dall'unione di più eventi elementari.

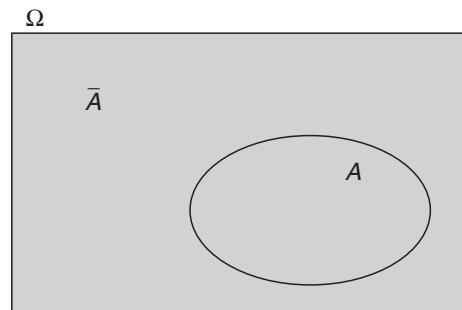
Lo spazio campione è l'**evento certo**; un evento che nello spazio campione è costituito da un solo punto campione è un evento elementare.

3.2 Negazione

L'insieme degli elementi non inclusi in A è denominato **complemento** o **negazione** di A e si indica con il simbolo \bar{A} , oppure con $\Omega - A$. La negazione dell'evento A riguarda tutti gli eventi di una prova escluso l'evento A .



$$\bar{A}$$



$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

3.3 Intersezione (prodotto logico)

Siano dati due eventi A e B , si dice **intersezione** di A e B e si denota con il simbolo:

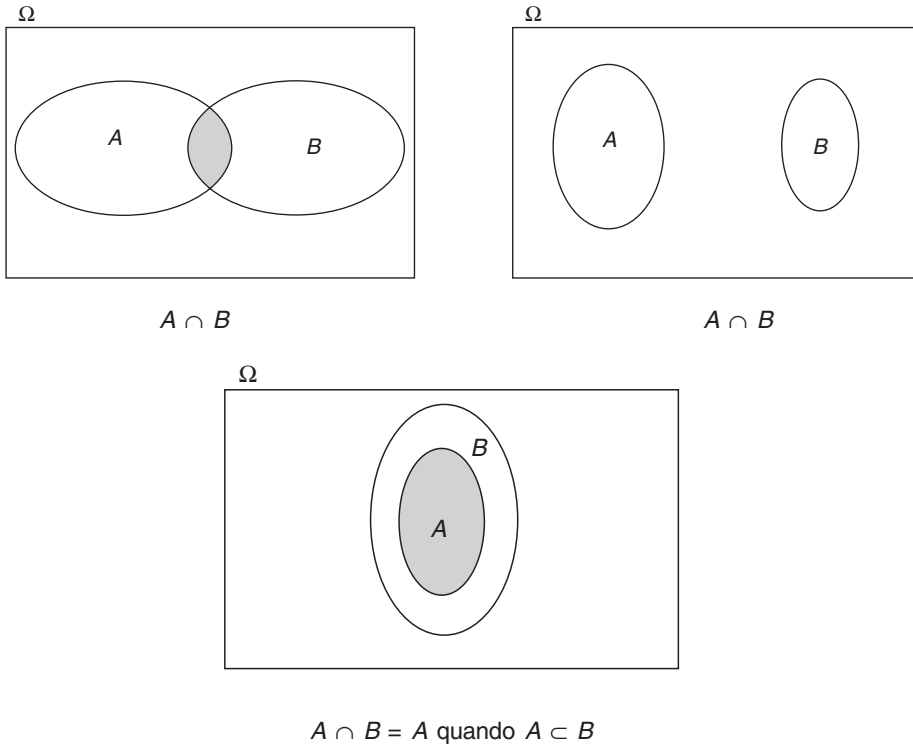
$$A \cap B$$

(dove \cap è il simbolo di *intersezione*) quell'evento C che si verifica se e solo se si verificano **contemporaneamente** sia A sia B .

Grazie all'operazione di intersezione è possibile dare un'ulteriore e più precisa definizione di **evento elementare**; è tale l'evento E che, per ogni evento A , può solo verificarsi che E è incluso in A oppure che E è incompatibile con A . Formalmente:

$$A \cap E = E \text{ oppure } A \cap E = \emptyset$$

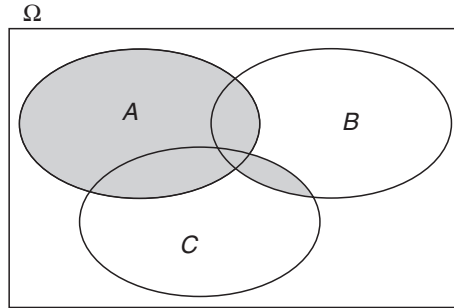
La figura seguente rappresenta, nell'area ombreggiata, tre possibili situazioni di intersezione:



La tabella seguente riporta alcune notevoli proprietà dell'unione e dell'intersezione di due eventi:

Proprietà	Unione	Intersezione
Idempotenza	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Elemento neutro	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \Omega = A$
Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Le proprietà esposte possono essere verificate facilmente ricorrendo ai diagrammi di Venn. La figura seguente, ad esempio, illustra la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:



$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

◆ Esempio

Una moneta è lanciata due volte, determinare i seguenti eventi:

- $A = \{\text{esce esattamente una volta testa}\};$
- $B = \{\text{esce almeno una volta testa}\};$
- $A \cup B;$
- $A \cap B.$

Sia T il risultato testa e C il risultato croce, sulla base di queste notazioni gli eventi sono i seguenti:

- $A = \{(T,C), (C,T)\};$
- $B = \{(T,T), (T,C), (C,T)\};$
- l'evento unione di A e B si verifica quando si verifica almeno uno dei due eventi A e B , per cui è:

$$A \cup B = \{(T,T), (T,C), (C,T)\} = B$$

in questo caso è $A \subset B$;

- l'evento intersezione di A e B si verifica quando si verificano contemporaneamente sia A sia B , per cui è:

$$A \cap B = \{(T,C), (C,T)\} = A$$

Il legame esistente tra le operazioni espresse è fornito dalle **leggi di De Morgan**, per le quali:
— la negazione dell'unione tra due eventi è uguale all'intersezione delle negazioni degli eventi stessi; in simboli:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

— la negazione dell'intersezione tra due eventi è uguale all'unione delle negazioni degli eventi stessi; in simboli:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

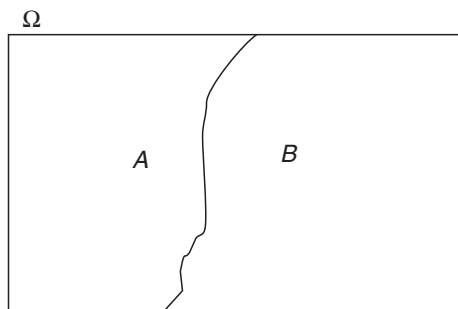
3.4 Partizione di Ω

— Se $A \cap B = \emptyset$, allora si dice che A e B sono **incompatibili** o **mutuamente esclusivi**.

— Due eventi A e B si dicono, invece, **necessari** se la loro unione è l'evento certo; in simboli:

$$A \cup B = \Omega$$

La rappresentazione grafica dei due eventi è la seguente:



Una raccolta di *eventi necessari e incompatibili* E_i si dice una **partizione di Ω** , che è tale se e solo se:

- la loro unione è l'evento certo, ossia $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \Omega$;
- sono incompatibili a due a due, ossia $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

4. Definizioni alternative della probabilità

Nonostante sia un concetto primitivo, la **probabilità** ha ricevuto nel tempo definizioni diverse, le quali, a dispetto del forte contenuto intuitivo, e quindi della loro plausibilità, presentano rilevanti inadeguatezze, almeno dal punto di vista del rigore scientifico.

Di seguito diamo tre definizioni di probabilità: *classica, frequentista, soggettivista*.

4.1 Definizione classica

La **definizione classica** della probabilità, utilizzata già da Galileo, Fermat e formalizzata da Laplace, è la seguente:

Sia dato un esperimento ed un evento E tra i possibili eventi risultanti dall'esperimento, sia m il numero dei possibili risultati che danno luogo all'evento E , e n il numero di tutti i possibili risultati dell'esperimento allora, la probabilità dell'evento E è il rapporto m/n , purché gli n risultati possibili siano tutti ugualmente possibili; in simboli:

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

La probabilità di un qualsiasi evento E è sempre un numero tale che:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Assume valore estremo 0 quando il numero dei casi favorevoli all'evento è pari a 0, in tal caso l'evento è **impossibile**, mentre assume valore estremo 1 quando il numero dei casi favorevoli coincide con il numero dei casi possibili, in tal caso l'evento è **certo**.

◆ Esempio

Da un mazzo di 52 carte ne viene estratta 1.
Determinare la probabilità che si estragga una carta di cuori.

Il numero dei casi favorevoli è 13, infatti 13 sono le carte di cuori, mentre il numero dei casi possibili è 52. Pertanto, la probabilità richiesta è:

$$P(\text{una carta di cuori}) = \frac{13}{52} = 0,25$$

La definizione ha l'ambizione di cogliere la vera essenza del concetto di misura di una probabilità, indipendentemente dal particolare esperimento in esame. Tuttavia, fa riferimento ad un rapporto tra *casi favorevoli* e *casi possibili*, supposti *ugualmente possibili*, ma per sapere se un caso è possibile, e se più casi sono ugualmente possibili o, il che è lo stesso ugualmente probabili, bisognerebbe dapprima definire cosa si intende per probabilità, cadendo in un circolo vizioso.

4.2 Definizione frequentista

La **definizione frequentista** di probabilità di un evento, opera di R. von Mises, stabilisce una relazione tra il concetto di frequenza e quello di probabilità, la prima calcolata dopo avere effettuato l'esperimento (a posteriori), la seconda definita prima dell'esperimento (a priori). Essa può essere espressa nella forma seguente:

Sia dato un esperimento perfettamente ripetibile ed un evento E tra i possibili eventi risultanti dall'esperimento, sia $fr_n(E)$, la frequenza assoluta di E , ossia il numero di volte in cui si è verificato E in una serie di n esperimenti ripetuti nelle medesime condizioni, allora la probabilità dell'evento E è il limite cui tende la frequenza relativa dell'evento E quando il numero delle prove n tende all'infinito; in simboli:

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{fr_n(E)}{n}$$

La probabilità di un evento si definisce ricorrendo alla **legge empirica del caso** per la quale, effettuando un gran numero di prove nelle medesime condizioni, la frequenza dei successi si approssima alla probabilità, e l'approssimazione migliora al crescere del numero delle prove.

La definizione trova applicazione nel campo delle assicurazioni in relazione agli eventi attinenti la vita umana studiati nei confronti di una collettività, in cui particolare importanza hanno le frequenze calcolate per la sopravvivenza e la mortalità di individui per diverse fasce di età. In base alla definizione frequentista della probabilità e alla legge empirica del caso, le frequenze suddette sono assimilate alla probabilità di sopravvivenza e di mortalità.

La definizione esposta sebbene sia di tipo più concreto della precedente, necessita di un numero infinito di prove per essere effettivamente una definizione. Ora, poiché, in ambiti normali non è dato ad uno sperimentatore umano di ripetere infinite volte una prova, anche la seconda definizione non è adeguata.

Inoltre, la definizione necessita che le successive prove si svolgano nelle medesime condizioni. È questa la condizione di ripetibilità dell'esperimento in pratica quasi mai attuabile.

4.3 Definizione soggettivista

La **definizione soggettivista** della probabilità, opera di De Finetti, trae le sue origini nel gioco d'azzardo, ed esprime il grado di fiducia che un individuo coerente, sulla base delle

informazioni di cui dispone, attribuisce al verificarsi di un evento. Essa è espressa nella forma seguente:

Sia dato un esperimento e sia E un evento tra i possibili eventi risultanti dall'esperimento, allora la probabilità dell'evento E è la somma che un individuo coerente è disposto a scommettere in un gioco equo in cui, se si verifica E , egli riceve un importo unitario.

In altri termini, la probabilità di E rappresenta la disponibilità di un individuo a pagare, in quanto equa, la quota di una scommessa, per riscuotere, se si verifica E , un importo unitario e se non si verifica E un importo nullo.

◆ Esempio

Uno scommettitore deve puntare su un dato cavallo. Se per lo scommettitore la probabilità di vittoria del cavallo è 0,2, vuol dire che egli è disposto a pagare 20€ per riceverne 100 nel caso di vittoria del cavallo.

Il limite fondamentale della definizione è che la stessa non è basata su concetti rigorosi esprimibili in termini formali, ma su congetture personali.

5. Assiomatizzazione del calcolo delle probabilità

Le considerazioni sull'inadeguatezza delle definizioni precedenti, pur pienamente accettate dal senso comune, portarono i matematici ad un notevole sforzo di ricerca e di fondazione teorica. Per fare in modo che la teoria della probabilità assumesse la veste di scienza matematica a tutti gli effetti, al pari della Geometria e dell'Algebra, Kolmogorov nel 1933, ha affrontato le problematiche connesse alla probabilità secondo il metodo tipico delle scienze deduttive, che si basa sullo schema seguente:

- si introducono i **concetti primitivi**, cioè delle nozioni originarie non definibili;
- si **formalizzano** tali concetti;
- mediante tali concetti si enunciano **assiomi** o **postulati**, che non sono dimostrabili ma che si ritengono utili, necessari e coerenti;
- da questi ultimi si deducono tutte le conseguenze, logiche e matematiche, pervenendo alla dimostrazione di **teoremi**.

I **concetti primitivi** su cui poggia l'assiomatizzazione del calcolo delle probabilità sono quelli di **prova**, **evento** e **probabilità**. Per probabilità si intende, comunque, un numero associato al verificarsi di un evento.

Per esprimere i **postulati** del calcolo delle probabilità si deve introdurre, d'ora in poi, la seguente simbologia concernente gli eventi:

- siano E_i , $i = 1, 2, \dots, n$, n eventi dello spazio campione Ω ;
- la probabilità dell'evento i -esimo sia $P(E_i)$.

Ad ogni evento E_i dello spazio campione è associato un numero reale $P(E_i)$ che soddisfa i seguenti postulati:

POSTULATO 1. La probabilità di un evento è una funzione che assegna ad ogni evento un numero reale non negativo:

$$P(E_i) \geq 0, \forall E_i \subset \Omega$$

POSTULATO 2. L'evento certo Ω ha probabilità 1:

$$P(\Omega) = 1$$

POSTULATO 3. La probabilità dell'unione di una infinità numerabile di eventi incompatibili è uguale alla somma delle singole probabilità:

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Sulla base dei postulati esposti si possono dimostrare i seguenti **teoremi**:

TEOREMA 1

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$$

TEOREMA 2

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

TEOREMA 3

$$P(\emptyset) = 0$$

TEOREMA 4

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

TEOREMA 5

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

TEOREMA 6 (probabilità dell'unione di eventi non incompatibili)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

TEOREMA 7

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

TEOREMA 8 (noto anche come **principio di inclusione-esclusione**)

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i \neq j=1}^n P(E_i \cap E_j) + \sum_{i \neq j \neq h=1}^n P(E_i \cap E_j \cap E_h) - \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n)$$

Valgono, inoltre, le seguenti relazioni fondamentali:

— **disuguaglianza di Boole**

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

— **disuguaglianza di Bonferroni**

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(\bar{E}_i) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - (n-1)$$

6. Probabilità condizionata

Siano dati due eventi A e B , talvolta è interessante sapere se il verificarsi del primo può in qualche modo condizionare la probabilità del verificarsi del secondo. A questo punto una volta verificatosi, l'evento A è un evento certo, assumendo, quindi, la configurazione dello spazio campione. Pertanto, quale che sia la definizione della probabilità, si definisce la probabilità del-

l'evento B dato che si è verificato l'evento A , rapportando la probabilità dell'evento intersezione $A \cap B$ (che rappresenta gli eventi elementari comuni ad A e a B) alla probabilità dell'evento A ; in simboli la **probabilità condizionata** o **subordinata** di B dato che si è verificato A è:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (6.1)$$

supposto $P(A) > 0$.

Dalla (6.1) si deduce che, dati due eventi A e B , la probabilità del contemporaneo verificarsi di A e di B , in altri termini, la probabilità dell'evento intersezione $A \cap B$ è pari a:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \quad (6.2)$$

supposto $P(A) > 0$.

Se, invece, dati i due eventi A e B , il verificarsi di A non altera la probabilità del verificarsi di B , allora si dice che i due eventi sono **indipendenti**, per cui:

$$P(B|A) = P(B) \quad (6.3)$$

Pertanto, la (6.2), che esprime la probabilità del contemporaneo verificarsi dei due eventi, diviene:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (6.4)$$

La formula data può essere estesa a qualsivoglia numero di eventi. Per cui, dati gli eventi $E_1, E_2, \dots \subset \Omega$, si dice che essi sono mutuamente indipendenti se, per ogni gruppo di $m > 1$ eventi, vale la seguente relazione:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_m) = P(E_1)P(E_2) \dots P(E_m) = \prod_{i=1}^m P(E_i)$$

◆ Esempio

Un giocattolo è ottenuto assemblando tre parti differenti: A , B e C . Le probabilità che tali parti siano difettose sono, rispettivamente:

$$P(A) = 0,20 \quad P(B) = 0,08 \quad P(C) = 0,25$$

Determinare la probabilità che il giocattolo non presenti parti difettose.

La probabilità richiesta si ottiene calcolando, innanzi tutto, le probabilità degli eventi complementari degli eventi dati, ossia che le parti non siano difettose:

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,20 = 0,80$$

$$P(\bar{B}) = 1 - 0,08 = 0,92$$

$$P(\bar{C}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

da cui si ha:

$$P(\text{ il giocattolo non presenta parti difettose}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0,80 \cdot 0,92 \cdot 0,75 = 0,552$$

6.1 Albero degli eventi

L'insieme dei possibili risultati di una prova può essere rappresentato da un **albero degli eventi** che consiste in un diagramma logico-induttivo usato per analizzare la sequenza di conseguenze che possono insorgere dal verificarsi di un dato evento iniziale.

◆ Esempio

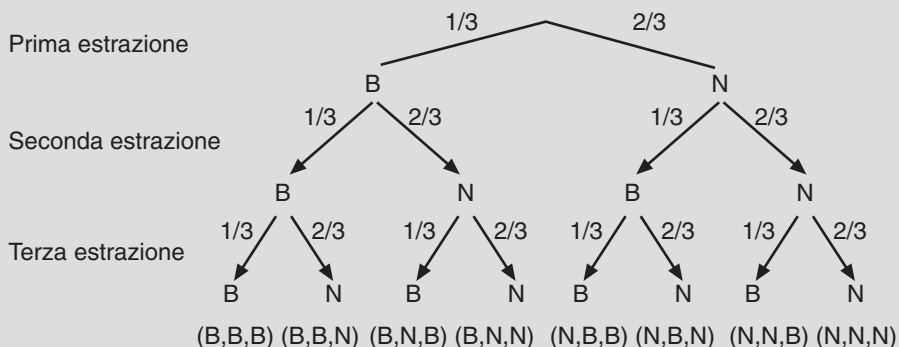
Un'urna contiene 12 palline di cui 4 bianche e 8 nere, si supponga di estrarre a caso 3 palline dall'urna e di rimettere ogni volta la pallina estratta nell'urna. Rappresentare l'insieme delle situazioni possibili con un albero degli eventi e calcolarne le probabilità.

Le probabilità di estrarre dall'urna una pallina bianca e una pallina nera sono pari, rispettivamente, a:

$$P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ e } P(N) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Siccome, ad ogni estrazione, la pallina estratta viene rimessa nell'urna, il che non ne altera la composizione, le successive probabilità di estrazione non cambiano.

L'albero degli eventi, alle 3 estrazioni, è riportato di seguito:



Dall'albero si evince, ad esempio, che la probabilità che, alle 3 estrazioni, le palline si presentino nell'ordine B, N, N , è pari a:

$$P(B, N, N) = P(B_1, N_2, N_3) = P(B_1)P(N_2)P(N_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

6.2 Affidabilità

Sia dato un sistema formato da n componenti, A_1, A_2, \dots, A_n , ognuno, indipendentemente dagli altri, può essere **funzionante** o **guasto**. Il sistema nel suo complesso funziona o è guasto secondo gli stati delle componenti. La probabilità che il sistema funzioni è detta **affidabilità** del sistema.

Sia p_i la probabilità che il componente i -esimo funzioni.

Se il sistema è **in serie** funziona se e solo se **ciascun** componente funziona. L'affidabilità del sistema è:

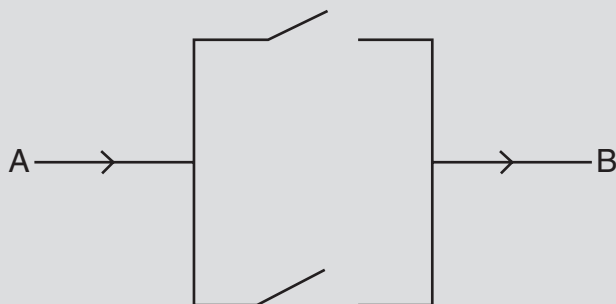
$$P(\text{il sistema funziona}) = \prod_{i=1}^n p_i \quad (6.5)$$

Se il sistema è **in parallelo** funziona se e solo se **almeno** un componente funziona. L'affidabilità del sistema è:

$$\begin{aligned}
 P(\text{il sistema funziona}) &= 1 - P(\text{il sistema non funziona}) = \\
 &= 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n) = \\
 &= \prod_{i=1}^n (1 - p_i)
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

◆ Esempio

Un sistema è formato da due componenti A e B collegati in parallelo:



Determinare la probabilità di una connessione tra X e Y , date le probabilità:

$$P(A) = 0,7 \text{ e } P(B) = 0,55$$

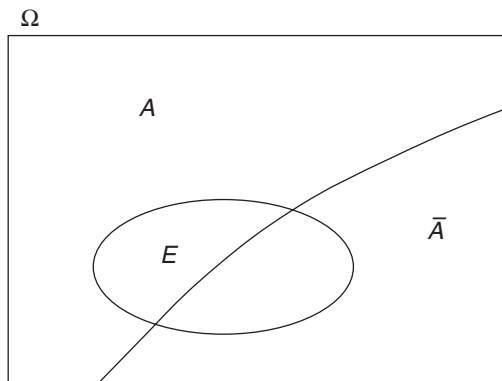
La probabilità richiesta, applicando la (6.6) è:

$$P(\text{il sistema funziona}) = 1 - (1 - 0,7)(1 - 0,55) = 0,865$$

7. Partizione di eventi e regola di Bayes

Si supponga che lo spazio campione Ω possa essere partizionato in due parti disgiunte A e \bar{A} . Sia E un evento tale che:

$$E = (E \cap A) \cup (E \cap \bar{A})$$



La probabilità $P(E)$ del verificarsi dell'evento E può essere ottenuta applicando la seguente regola:

REGOLA DI BAYES O REGOLA DELLA FATTORIZZAZIONE

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap A) + P(E \cap \bar{A}) = \\ &= P(E|A)P(A) + P(E|\bar{A})P(\bar{A}) \\ &= P(E|A)P(A) + P(E|\bar{A})[1 - P(A)] \end{aligned} \quad (7.1)$$

Tale regola è applicabile allorché $P(E)$ sia difficile da calcolare ma siano note $P(A)$ e $P(\bar{A})$ e siano facilmente calcolabili le probabilità condizionate $P(E|A)$ e $P(E|\bar{A})$.

Nulla impedisce di estenderla a più eventi.

◆ Esempio

Il 25% degli iscritti ad un'associazione culturale è costituito da maschi; il 30% di questi sono fumatori, mentre tra le femmine il 40% sono fumatrici.

Determinare la probabilità che, scegliendo a caso un iscritto, questi sia un fumatore.

Siano M e F , rispettivamente, gli eventi *maschio* e *femmina*. La probabilità $P(E)$ dell'evento *fumatore* si ottiene considerando che:

$$P(M) = 0,25$$

$$P(F) = 1 - P(M) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$P(E|M) = 0,30$$

$$P(E|F) = 0,40$$

La probabilità dell'evento E , applicando la (7.1), è:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|M)P(M) + P(E|F)P(F) = \\ &= 0,30 \cdot 0,25 + 0,40 \cdot 0,75 = 0,375 \end{aligned}$$

TEOREMA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Siano E_1, E_2, \dots, E_m , eventi mutuamente incompatibili che costituiscono una partizione di Ω , per ogni evento $A \subset \Omega$, si ha:

$$P(A) = \sum_{i=1}^m P(E_i)P(A|E_i)$$

La dimostrazione del teorema è semplice.

Essendo E_1, E_2, \dots una partizione di Ω , allora l'evento A si scrive nel modo seguente:

$$A = A \cap \Omega = (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m) \cap A = (E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A) \cup \dots \cup (E_m \cap A)$$

Dal postulato 3 si ha:

$$P(A) = P[(E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A) \cup \dots \cup (E_m \cap A)] = \sum_{i=1}^m P(E_i \cap A)$$

in cui, dalla relazione (6.2), si ha:

$$P(A) = \sum_{i=1}^m P(E_i \cap A) = \sum_{i=1}^m P(E_i)P(A|E_i) \text{ c.v.d.}$$

8. Teorema di Bayes

Applicando la (6.1) e la (7.1) si ottiene il **teorema di Bayes** che consente di calcolare la probabilità che, essendosi verificato un evento, abbia agito una data causa in un gruppo di cause incompatibili ed esaustive.

TEOREMA

Se H_1, H_2, \dots, H_m sono eventi che costituiscono una partizione di Ω , allora, per qualunque, evento $E \subset \Omega$, la probabilità di H_i dato E è:

$$P(H_i|E) = \frac{P(H_i)P(E|H_i)}{\sum_{j=1}^m P(H_j)P(E|H_j)} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (8.1)$$

Nella formula del teorema di Bayes intervengono:

- le **probabilità a posteriori** $P(H_i|E)$ dell'ipotesi H_i dato l'effetto E ;
- le **probabilità a priori** $P(H_j)$ che hanno le singole ipotesi di verificarsi;
- le **verosimiglianze** o **probabilità probative** $P(E|H_j)$ che l'effetto sia stato causato da una data ipotesi.

Infatti, per la formula (6.1), si ha:

$$P(H_i|E) = \frac{P(H_i \cap E)}{P(E)}$$

Poiché $E = \sum_{j=1}^m (E \cap H_j)$ allora, per il teorema delle probabilità totali:

$$P(E) = \sum_{j=1}^m P(H_j)P(E|H_j) \quad (8.2)$$

Inoltre, dalla formula (6.1) si ha:

$$P(E \cap H_i) = P(E)P(H_i|E) = P(H_i)P(E|H_i)$$

da cui:

$$P(H_i|E) = \frac{P(H_i)P(E|H_i)}{P(E)}$$

in cui, andando a sostituire l'espressione di $P(E)$ che si ottiene dalla (8.2) si ottiene la formula del teorema di Bayes fornita dalla (8.1).

◆ Esempio

Un'impresa utilizza tre impianti (A, B e C) caratterizzati da tecnologie produttive distinte per produrre un unico bene. Si supponga che il 40% della produzione provenga dall'impianto A, il 50% dall'impianto B e il restante 10% dall'impianto C. Della produzione proveniente dall'impianto A il 10% è difettosa, di quella proveniente dall'impianto B il 5% è difettosa, infine, di quella proveniente dall'impianto C il 2% è difettosa.

Se si sceglie un prodotto a caso e si trova che esso è difettoso, determinare la probabilità che provenga dall'impianto:

- A;
- B;
- C.

Per rispondere alle tre domande si deve applicare il teorema di Bayes, in base al quale è possibile calcolare le probabilità delle cause dato che un evento *effetto* si è verificato. Più precisamente:

$$P(H_i|E) = \frac{P(H_i)P(E|H_i)}{\sum_{j=1}^m P(H_j)P(E|H_j)}$$

dove:

E = pezzo difettoso (evento effetto);

H_1 = provenienza dall'impianto A (evento causa);

H_2 = provenienza dall'impianto B (evento causa);

H_3 = provenienza dall'impianto C (evento causa).

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_{j=1}^3 P(E \cap H_j) = \sum_{j=1}^3 P(H_j)P(E|H_j) = (0,40 \cdot 0,10) + (0,50 \cdot 0,05) + (0,10 \cdot 0,02) = \\ &= 0,04 + 0,025 + 0,002 = 0,067 \end{aligned}$$

Quindi, applicando la formula del teorema di Bayes:

$$a) P(H_1|E) = \frac{P(H_1) \cdot P(E|H_1)}{P(E)} = \frac{0,40 \cdot 0,10}{0,067} = 0,597$$

$$b) P(H_2|E) = \frac{P(H_2) \cdot P(E|H_2)}{P(E)} = \frac{0,50 \cdot 0,05}{0,067} = 0,373$$

$$c) P(H_3|E) = \frac{P(H_3) \cdot P(E|H_3)}{P(E)} = \frac{0,10 \cdot 0,02}{0,067} = 0,030$$

9. Richiami di calcolo combinatorio

Talvolta, nel calcolare la probabilità di un evento si rende necessario ricorrere ai concetti propri dell'**analisi combinatoria**, la quale consente di elencare senza errori tutti gli eventi elementari costituenti l'evento in questione.

I concetti che qui interessano sono i seguenti:

DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE

Le **disposizioni senza ripetizione** di N elementi a n a n (o di classe n), sono i gruppi di n elementi che si possono formare con gli N di partenza, tali che due gruppi differiscono tra loro:

- per almeno un elemento;
- per l'ordine con cui sono disposti gli elementi.

Tale numero è uguale al prodotto degli n numeri interi consecutivi decrescenti partendo da N . Formalmente:

$$D_{N,n} = N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!} \quad (9.1)$$

◆ Esempio 1

Determinare in quanti modi si possono disporre 3 scatole su uno scaffale di 2 posti.

Indicando con a_1, a_2, a_3 le tre scatole, i modi secondo cui esse si possono disporre sugli scaffali sono:

$$\begin{array}{ccc} a_1, a_2 & a_1, a_3 & a_2, a_3 \\ a_2, a_1 & a_3, a_1 & a_3, a_2 \end{array}$$

Essi sono 6; tale numero, che si indica con $D_{3,2} = 6$, rappresenta le disposizioni semplici di 3 oggetti a 2 a 2 posti, si ottiene moltiplicando i 2 numeri interi consecutivi decrescenti a partire da 3, ossia $3 \cdot 2 = 6$.

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Le **disposizioni con ripetizione** di N elementi a n a n sono i gruppi che si possono formare con gli N elementi di partenza e che si ottengono associando ciascun elemento con tutti gli altri e anche con se stesso, sono tali che due gruppi differiscono tra loro:

- per almeno un elemento;
- per l'ordine;
- per la ripetizione.

Tale numero è uguale ad una potenza avente base N e esponente n . Formalmente:

$${}_r D_{N,n} = N^n \quad (9.2)$$

◆ Esempio 2

Con 3 libri identici e 3 quaderni identici, determinare il numero di disposizioni con ripetizione, a due a due diverse tra loro, dei 6 oggetti considerati su 3 posti.

Il numero di disposizioni con ripetizione di 6 oggetti, a due a due, su tre posti è dato da:

$${}_r D_{2,3} = 2^3 = 8$$

Indicando con l , ciascuno dei libri, peraltro identici, e con q ciascuno dei quaderni, anch'essi identici, le disposizioni in esame sono qui sotto rappresentate:

$$\begin{array}{ccc} l & l & l & q & q & q \\ l & q & q & q & l & l \\ l & l & q & q & q & l \\ l & q & l & q & l & q \end{array}$$

PERMUTAZIONI

Le **permutazioni** di n elementi sono le disposizioni senza ripetizione di n elementi in n posti. Il loro numero è uguale al prodotto degli n numeri interi decrescenti da n a 1. Formalmente:

$$P_n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (9.3)$$

Esso si indica con $n!$ e si chiama *fattoriale di n* (o *n fattoriale*).

◆ Esempio 3

Determinare in quanti modi si possono disporre, ad una parata militare 6 soldati in fila per 6.

Il numero dei posti è 6 come pure il numero degli oggetti, si è in presenza di permutazioni e si ha:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

COMBINAZIONI SENZA RIPETIZIONE

Le **combinazioni senza ripetizione** di N elementi a n a n sono i gruppi che si possono formare con gli N elementi di partenza, tali che due gruppi differiscono tra loro per almeno un elemento.

Tale numero si indica con $\binom{N}{n}$ e si chiama **coefficiente binomiale**, proprio perché figura come coefficiente nello sviluppo della potenza di un binomio. Formalmente:

$$C_{N,n} = \binom{N}{n} = \frac{D_{N,n}}{P_n} = \frac{N(N-1)(N-2) \dots (N-n+1)}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

in cui $D_{N,n}$ sono le disposizioni senza ripetizione di N elementi di classe n e P_n sono le permutazioni di n elementi.

◆ Esempio 4

Calcolare in quanti modi si possono disporre 6 alunni in un banco di 4 posti, eliminando le disposizioni che differiscono solo per l'ordine con cui sono collocati gli alunni.

Il numero delle partizioni distinte di 6 alunni in un banco di 4 posti è uguale a:

$$C_{6,4} = \frac{D_{6,4}}{P_4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Le **combinazioni con ripetizione** di N elementi a n a n (o di classe n), sono i gruppi di n elementi (uguali o diversi) che si possono formare, tali che due gruppi differiscono tra loro per:

- almeno un elemento;
- per la ripetizione.

Formalmente:

$${}_r C_{N,n} = C_{N+n-1, n} = \binom{N+n-1}{n}$$

◆ Esempio 5

Determinare il numero di casi diversi che si possono presentare sulla faccia superiore di due dadi, disposti su un piano orizzontale.

Ognuna delle facce superiori di ciascun dado può presentare 6 numeri: i naturali da 1 a 6. Siccome si chiede di considerare come uguali le combinazioni di due numeri di diversa disposizione, il numero cercato è uguale al numero di combinazioni con ripetizione di classe 2 di $2 \diamond 6$ elementi, a gruppi di 2 equivalenti tra loro, ed è dato da:

$${}_r C_{6,2} = C_{7,2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

Le combinazioni sono qui sotto rappresentate:

1,	1;	1,	2;	1,	3;	1,	4;	1,	5;	1,	6;
2,	2;	2,	3;	2,	4;	2,	5;	2,	6;		
3,	3;	3,	4;	3,	5;	3,	6;				
4,	4;	4,	5;	4,	6;						
5,	5;	5,	6;								
6,	6;										

Consideriamo ora l'applicazione del calcolo combinatorio nella teoria della probabilità.

◆ Esempio 6

Un'urna contiene 5 palline bianche, 4 nere e 10 rosse.

Determinare la probabilità che, estraendo a caso 2 palline senza rimetterle nell'urna:

- a) entrambe siano nere;
- b) 1 sia nera e 1 sia rossa;
- c) almeno 1 sia rossa.

Le probabilità sono calcolate ricorrendo all'analisi combinatoria.

- a) Sia E_1 l'evento «entrambe le palline sono nere», la probabilità richiesta si ottiene rapportando il numero di scelte di 2 palline da 4 nere, al numero di scelte di 2 palline da 19 (totale delle palline nell'urna):

$$P(E_1) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{19}{2}} = \frac{6}{171} = 0,03509$$

Alternativamente:

$$P(E_1) = \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18} = 0,03509$$

- b) Sia E_2 l'evento «1 pallina è nera e 1 pallina è rossa», la probabilità richiesta si ottiene considerando che il numero dei casi favorevoli all'evento si ottiene moltiplicando il numero di scelte di 1 pallina da 4 nere per il numero di scelte di 1 pallina da 10 rosse, pertanto si ha:

$$P(E_2) = \frac{\binom{4}{1} \binom{10}{1}}{\binom{19}{2}} = \frac{4 \cdot 10}{171} = 0,23392$$

- c) Sia E_3 l'evento «almeno 1 pallina è rossa», la probabilità richiesta si ottiene come complemento a 1 della probabilità che nessuna pallina sia rossa, ossia:

$$P(E_3) = 1 - P(\bar{E}_3) = 1 - \frac{\binom{10}{2}}{\binom{19}{2}} = 1 - \frac{45}{171} = 0,73684$$

■ Indice generale

■ 1 Elementi di calcolo delle probabilità

1. Introduzione	Pag.	5
2. Evoluzione storica della statistica	»	5
3. Eventi ed algebra di Boole	»	6
3.1 Unione (somma logica)	»	7
3.2 Negazione	»	8
3.3 Intersezione (prodotto logico)	»	9
3.4 Partizione di Ω	»	10
4. Definizioni alternative della probabilità	»	11
4.1 Definizione classica	»	11
4.2 Definizione frequentista	»	12
4.3 Definizione soggettivista	»	12
5. Assiomatizzazione del calcolo delle probabilità	»	13
6. Probabilità condizionata	»	14
6.1 Albero degli eventi	»	16
6.2 Affidabilità	»	16
7. Partizione di eventi e regola di Bayes	»	17
8. Teorema di Bayes	»	19
9. Richiami di calcolo combinatorio	»	20

■ 2 Teoria delle variabili aleatorie

1. Introduzione	»	25
2. Variabili aleatorie discrete e continue	»	25
2.1 Funzione di ripartizione	»	26
2.2 Funzione di rischio	»	28
3. Variabili aleatorie multivariate	»	28
3.1 Variabili aleatorie marginali e condizionate	»	29
3.2 Indipendenza tra variabili aleatorie	»	32
4. Trasformazioni di variabili aleatorie	»	34
5. Valore medio di variabili aleatorie	»	34
5.1 Valore medio di una v.a. multivariata	»	35
5.2 Proprietà del valore medio	»	36
5.3 Valori medi condizionati	»	37
6. Moda e mediana di variabili aleatorie	»	38
7. Varianza di variabili aleatorie	»	39
7.1 Proprietà della varianza	»	40
7.2 Varianza condizionata	»	40
8. Asimmetria e curtosi di variabili aleatorie	»	41
8.1 Asimmetria	»	41
8.2 Curtosi	»	41
9. Momenti di variabili aleatorie	»	42
9.1 Momenti r – esimi	»	42

9.2	Momenti r – esimi rispetto al valore medio	Pag.	43
9.3	Momenti r – esimi standardizzati	»	43
10.	Funzione generatrice dei momenti	»	44
11.	Covarianza e coefficiente di correlazione lineare	»	44
11.1	Covarianza	»	44
11.2	Coefficiente di correlazione	»	46
12.	Analisi della dipendenza e regressione	»	47
12.1	Metodo dei minimi quadrati	»	48
12.2	Indice F^2 di determinazione lineare	»	53
13.	Disuguaglianza di Chebyshev	»	57
14.	Criteri di convergenza di successioni di variabili aleatorie	»	57
15.	Modelli per variabili aleatorie discrete e continue	»	58
	<i>Utilizzo dei fogli elettronici in statistica</i>	»	60
	Retta di regressione	»	60

■ 3 Modelli per variabili aleatorie discrete

1.	Introduzione	»	61
2.	La variabile aleatoria uniforme discreta	»	61
3.	La variabile aleatoria di Bernoulli	»	62
4.	La variabile aleatoria binomiale	»	62
5.	La variabile aleatoria ipergeometrica	»	64
6.	La variabile aleatoria geometrica	»	66
7.	La variabile aleatoria binomiale negativa	»	66
8.	La variabile aleatoria di Poisson	»	67
	<i>Utilizzo dei fogli elettronici in statistica</i>	»	70
	Variabile aleatoria binomiale	»	70
	Variabile aleatoria ipergeometrica	»	71
	Variabile aleatoria di Poisson	»	72

■ 4 Modelli per variabili aleatorie continue

1.	Introduzione	»	73
2.	La variabile aleatoria uniforme continua	»	73
3.	La variabile aleatoria esponenziale negativa	»	74
4.	La variabile aleatoria Gamma	»	75
5.	La variabile aleatoria normale	»	76
5.1	Utilizzo della Tavola 1 in Appendice	»	79
6.	Variabili aleatorie dedotte dalla normale: chi - quadrato, t di Student, F di Fisher, lognormale	»	82
6.1	La variabile aleatoria chi - quadrato	»	82
6.2	La variabile aleatoria t di Student	»	84
6.3	La variabile aleatoria F di Fisher	»	85
6.4	La variabile aleatoria lognormale	»	87
7.	La variabile aleatoria normale bivariata	»	87
8.	Leggi dei grandi numeri	»	88
8.1	Leggi deboli dei grandi numeri	»	89
8.2	Leggi forti dei grandi numeri	»	90
9.	Teorema limite centrale	»	90

<i>Utilizzo dei fogli elettronici in statistica</i>	Pag.	94
Variabile aleatoria esponenziale negativa	»	94
Variabile aleatoria normale standardizzata	»	95
Variabile aleatoria chi-quadrato	»	96
Variabile aleatoria <i>t</i> di Student	»	97
Variabile aleatoria <i>F</i> di Fisher	»	98

■ 5 Studio sperimentale di variabili aleatorie. Distribuzioni campionarie

1. Introduzione	»	99
2. Campioni casuali semplici con e senza ripetizione	»	99
3. Altre procedure di campionamento	»	102
3.1 Campionamento probabilistico	»	102
3.2 Campionamento non probabilistico	»	103
4. Statistiche campionarie e distribuzioni campionarie	»	103
4.1 Distribuzione della media campionaria	»	103
4.2 Distribuzione della varianza campionaria	»	104
4.3 Distribuzione delle differenze delle medie campionarie	»	105
4.4 Distribuzione della proporzione (o frequenza) campionaria	»	106
4.5 Distribuzione delle differenze delle proporzioni campionarie	»	109
4.6 Distribuzione del coefficiente di correlazione campionario	»	110
5. Gli errori	»	110

■ 6 Teoria della stima

1. Introduzione	»	111
2. Proprietà ottimali di uno stimatore	»	111
2.1 Correttezza	»	112
2.2 Consistenza	»	112
2.3 Efficienza	»	113
2.4 Sufficienza	»	114
2.5 Normalità asintotica	»	114
3. Metodi di stima	»	114
3.1 Metodo dei minimi quadrati	»	114
3.2 Metodo dei momenti	»	114
3.3 Metodo della massima verosimiglianza	»	115
4. Intervalli di confidenza e determinazione della numerosità del campione	»	118
4.1 Intervallo di confidenza per la media di una popolazione normale con varianza nota	»	118
4.2 Intervallo di confidenza per la media di una popolazione normale con varianza non nota	»	121
4.3 Intervallo di confidenza per la differenza tra le medie di due popolazioni normali con varianza nota	»	122
4.4 Intervallo di confidenza per la differenza tra le medie di due popolazioni normali con varianza non nota	»	123
4.5 Intervallo di confidenza per la proporzione di una popolazione normale ...	»	124
4.6 Intervallo di confidenza per la differenza tra le proporzioni di due popolazioni normali	»	126
4.7 Intervallo di confidenza per la varianza di una popolazione normale	»	127

4.8 Intervallo di confidenza per il rapporto tra le varianze di due popolazioni normali	Pag. 127
5. Stima dei coefficienti di regressione	» 128
6. Metodo Monte Carlo	» 133
6.1 Numeri pseudo - casuali	» 133
6.2 Applicazione del metodo Monte Carlo	» 134
<i>Utilizzo dei fogli elettronici in statistica</i>	» 137
Varianza campionaria corretta	» 137
Intervallo di confidenza	» 137
 ■ 7 Test delle ipotesi statistiche. Test parametrici	
1. Introduzione	» 139
2. I test statistici	» 139
3. Test sulla media di una popolazione con varianza nota. Test normale	» 141
4. Test sulla media di una popolazione con varianza non nota. Test <i>t</i> di Student	» 146
5. Test sulla varianza di una popolazione. Test chi - quadrato	» 148
6. Test sulla differenza tra le medie di due popolazioni se sono note le varianze. Test normale	» 150
7. Test sulla differenza tra le medie di due popolazioni se non sono note le varianze. Test <i>t</i> di Student	» 152
8. Test sulla differenza tra medie per campioni appaiati. Test <i>t</i> di Student	» 153
9. Test sul rapporto tra varianze. Test <i>F</i> di Fisher	» 154
10. Analisi della varianza (Anova). Test <i>F</i> di Fisher	» 156
11. Test sul coefficiente di correlazione. Test <i>t</i> di Student	» 160
12. Test sui coefficienti di regressione	» 163
<i>Utilizzo dei fogli elettronici in statistica</i>	» 166
Test <i>t</i> : due campioni accoppiati per medie	» 166
Analisi della varianza	» 168
 ■ 8 Test non parametrici	
1. Introduzione	» 171
2. Test su frequenze. Test binomiale e test normale	» 171
2.1 Test binomiale	» 171
2.2 Test normale	» 171
3. Test sulla differenza tra tendenze centrali. Test della mediana	» 174
4. Test sulla differenza tra tendenze centrali per campioni appaiati. Test dei segni	» 175
5. Test sulla differenza tra frequenze	» 175
6. Test sulla differenza tra frequenze per campioni appaiati. Test di McNemar	» 177
7. Test sulla indipendenza. Test chi - quadrato e test esatto di Fisher	» 178
7.1 Test chi - quadrato	» 178
7.2 Test esatto di Fisher	» 180
 ■ 9 Controllo della qualità	
1. Introduzione	» 183
1.1 Regola del tre - sigma e errori di I e II tipo	» 185

2. Carte di controllo per variabili	Pag.	185
2.1 Carta di controllo \bar{X}	»	185
2.2 Carta di controllo S	»	188
3. Carte di controllo per attributi	»	192
3.1 Carta di controllo p	»	192
3.2 Carta di controllo c	»	196
4. Carte di controllo CuSum	»	198

■ Appendice

Tavola 1	»	203
Tavola 2	»	204
Tavola 3	»	205
Tavola 4	»	206
Tavola 4 (Segue)	»	207
Tavola 4 (Segue)	»	208

