

Luciano Romano

punto**exe**

# L'esame di Analisi Matematica

## Limiti, continuità, calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale

### Esercizi svolti e commentati

- Limiti
- Continuità
- Derivate di funzioni esplicite ed implicite
- Massimi e minimi relativi ed assoluti
- Limiti calcolabili con la regola di L'Hospital
- Problemi di calcolo differenziale in geometria e fisica

**CD-Rom con:**  
Guida a Matlab  
Software per il calcolo scientifico  
Guida alle risorse internet per gli studenti

## Prefazione

Il testo, rivolto agli studenti universitari che si apprestano ad affrontare l'esame di Analisi Matematica, propone un'iniziale parte teorica e suggerimenti sulla risoluzione della vasta gamma di argomenti trattati: limiti, continuità e calcolo differenziale di funzioni esplicite ed implicite di una variabile reale.

Particolare attenzione è posta alle derivate, da alcuni considerate (a torto) uno degli argomenti più semplici dell'Analisi Matematica, ma le cui applicazioni anche ad altre discipline ad essa strettamente correlate sono notevoli.

Per questo motivo, il volume, oltre a fornire esercizi sulle tecniche di risoluzione delle derivate, dedica un ultimo capitolo ad una serie di problemi in cui i concetti di calcolo differenziale sono applicati alla geometria e alla fisica.

Con l'augurio che l'utilizzo di questo testo possa risultare proficuo a coloro che ne faranno uso, e con l'invito ai lettori tutti di voler fornire utili e preziosi suggerimenti, ringrazio vivamente l'Editore che ha curato la veste tipografica e la pubblicazione del testo.

LUCIANO ROMANO

## Indice dei simboli

$>$	<i>maggiore</i>
$<$	<i>minore</i>
$\geq$	<i>maggiore o uguale</i>
$\leq$	<i>minore o uguale</i>
$\neq$	<i>diverso da</i>
$\cong$	<i>circa uguale a</i>
$\pm$	<i>più o meno</i>
$\infty$	<i>infinito</i>
$\rightarrow$	<i>tende a</i>
$\forall$	<i>per ogni</i>
$\in$	<i>appartiene</i>
$\notin$	<i>non appartiene</i>
$\cup$	<i>unione tra insiemi</i>
$\cap$	<i>intersezione tra insiemi</i>
$\subset$	<i>sottoinsieme proprio</i>
$\subseteq$	<i>sottoinsieme</i>
$\not\subset$	<i>non è sottoinsieme</i>
$\Rightarrow$	<i>implicazione</i>
$\Leftrightarrow$	<i>doppia implicazione</i>
$N$	<i>insieme dei numeri naturali</i>
$R$	<i>insieme dei numeri reali</i>
$n!$	<i>n fattoriale</i>
$\log_a( )$	<i>logaritmo in base a</i>
$\ln( )$	<i>logaritmo neperiano</i>
$e$	<i>numero di Nepero</i>
$\text{sgn}$	<i>funzione segno</i>
$\lim$	<i>limite</i>
$f'(x)$	} <i>derivata prima della funzione</i>
$D[f(x)]$	
$\frac{dy}{dx}$	
$f'_x(x,y)$	<i>derivata parziale della funzione rispetto a x</i>
$f'_y(x,y)$	<i>derivata parziale della funzione rispetto a y</i>
$\Sigma$	<i>sommatoria</i>

# 1 Limiti di funzioni reali di una variabile reale

## 1.1 Definizione di limite

Sia data la funzione  $f(x)$  definita nell'insieme  $X$  e sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $X$ ; si dice che il **limite** di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$  è  $l$  e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

se, fissato ad arbitrio un numero  $\varepsilon > 0$  esiste un numero  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che se  $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ , cioè  $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$ , allora:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

cioè:

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

In altri termini: fissato ad arbitrio un intorno  $J$  di  $l$ , esiste un intorno  $I$  di  $x_0$  tale che  $\forall x \in I - \{x_0\}$ ,  $f(x) \in J$ .

La definizione si generalizza facilmente ai casi di  $x_0$  e di  $l$  **infiniti**; ad esempio si consideri il limite finito per  $x$  tendente ad infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon > 0 \mid \forall x > K_\varepsilon, |f(x) - l| < \varepsilon$$

## 1.2 Teoremi sui limiti

Nel calcolo dei limiti di funzioni, è utile tener presente i seguenti teoremi:

### TEOREMA I (UNICITÀ DEL LIMITE)

Se, al tendere di  $x$  ad  $x_0 \in R$ , la funzione  $y = f(x)$  tende al limite  $l \in R$ , questo limite è unico.

### TEOREMA II (PERMANENZA DEL SEGNO)

Se, al tendere di  $x$  ad  $x_0 \in R$ , la funzione  $y = f(x)$  tende al limite  $l \neq 0$ , esiste un intorno di  $x_0$  in cui (escluso al più  $x_0$ ) la funzione assume lo stesso segno del suo limite.

Viceversa, se al tendere di  $x$  ad  $x_0$ , la funzione  $y = f(x)$  tende al limite  $l$  e se esiste un intorno di  $x_0$  (escluso  $x_0$ ) in cui la funzione assume segno costante, il limite sarà o dello stesso segno della funzione o nullo.

### TEOREMA III (CONFRONTO O «DEI DUE CARABINIERI»)

Date le tre funzioni  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ ,  $y = f_3(x)$  definite, rispettivamente, negli insiemi  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , se è:

$$F = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \neq \emptyset$$

se, inoltre, risulta, per  $x \in F$ :

$$f_1(x) < f_2(x) < f_3(x)$$

e se, infine, indicato con  $x_0$  un punto di accumulazione di  $F$ , risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_3(x) = l$$

sarà anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l$$

#### TEOREMA IV (FUNZIONE OPPOSTA)

Se, al tendere di  $x$  ad  $x_0 \in R$ , la funzione  $y = f(x)$  tende al limite  $l$ , avremo anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [-f(x)] = -l$$

#### TEOREMA V (VALORE ASSOLUTO)

Se, al tendere di  $x$  ad  $x_0 \in R$ , la funzione  $y = f(x)$  tende al limite  $l$ , il valore assoluto della funzione tenderà al valore assoluto del limite, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

### 1.3 Operazioni sui limiti e forme indeterminate

#### 1) LIMITE DELLA SOMMA

Date le due funzioni  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  definite rispettivamente negli insiemi  $A$  e  $B$ , con  $A \cap B \neq \emptyset$ , se, indicato con  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A \cap B$ , risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

allora è anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 + l_2$$

In altri termini: il limite della somma di due funzioni è uguale alla somma dei limiti di ciascuna funzione.

#### 2) LIMITE DELLA DIFFERENZA

Date le due funzioni  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  definite rispettivamente negli insiemi  $A$  e  $B$ , con  $A \cap B \neq \emptyset$ , se, indicato con  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A \cap B$ , risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

allora è anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 - l_2$$

In altri termini: il limite della differenza di due funzioni è uguale alla differenza dei limiti di ciascuna funzione.

#### 3) LIMITE DEL PRODOTTO

Date le due funzioni  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  definite rispettivamente negli insiemi  $A$  e  $B$ , con  $A \cap B \neq \emptyset$ , se, indicato con  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A \cap B$ , risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

allora è anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$$

In altri termini: il limite del prodotto di due funzioni è uguale al prodotto dei limiti di ciascuna funzione.

#### 4) LIMITE DELLA FUNZIONE RECIPROCA

Data la funzione  $y = f(x)$  definita nell'insieme  $A$ , se, indicato con  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A$ , risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$$

allora è anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$$

In altri termini: il limite del reciproco di una funzione è uguale al reciproco del limite della funzione.

#### 5) LIMITE DEL QUOZIENTE

Date le due funzioni  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  definite rispettivamente negli insiemi  $A$  e  $B$ , con  $A \cap B \neq \emptyset$ , se, indicato con  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A \cap B$ , risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

con  $l_1$  e  $l_2$  numeri finiti e  $l_2 \neq 0$ , allora è anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

In altri termini: il limite del quoziente di due funzioni è uguale al quoziente dei limiti di ciascuna funzione.

#### 6) LIMITE DELLA POTENZA

Data la funzione  $y = f(x)$  definita nell'insieme  $A$ , se, indicato con  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A$ , risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

allora è anche  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = l^n$$

In altri termini: il limite della potenza di una funzione è uguale alla potenza del limite della funzione.

#### 7) LIMITE DELLA RADICE

Data la funzione  $y = f(x)$  definita nell'insieme  $A$ , se, indicato con  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A$ , risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

se  $x_0$  è di accumulazione anche per l'insieme di definizione della funzione  $\sqrt[n]{f(x)}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$  allora è anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[n]{l}$$

In altri termini: il limite della radice di una funzione è uguale alla radice del limite della funzione.

## 8) LIMITE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

Date le due funzioni  $y = f(x)$  e  $z = g(y)$  definite rispettivamente negli insiemi  $X$  e  $Y$ , con  $f(X) \cap Y \neq \emptyset$ ; sia, inoltre,  $z = g(f(x))$  la funzione composta dalle funzioni  $f$  e  $g$  definita nell'insieme  $A = f(X) \cap Y$ ; se, indicato con  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A$ , risulta:

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$

b)  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$

c)  $f(x) \neq y_0$  intorno a  $x_0$  ( $f$  non assume il valore  $y_0$  costantemente intorno a  $x_0$ )

allora è anche:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$$

In particolare, l'ipotesi c) è senz'altro verificata se la funzione  $f$  è monotona in senso stretto a sinistra e a destra di  $x_0$ , ipotesi sempre verificata se  $f$  è elementare.

Tale teorema costituisce una generalizzazione dei precedenti.

Nelle ipotesi del teorema, dunque, l'operatore  $\lim$  può *entrare* all'interno delle funzioni composte, rendendone più agevole il calcolo del limite.

Indicate con  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni che soddisfino le ipotesi del teorema 8), vediamo i seguenti notevoli esempi:

I) se  $A \neq 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a f(x) = \log_a \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

II)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{sen}[f(x)] = \operatorname{sen}\left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right]$

III)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$  se  $f(x)$  e  $g(x)$  convergono entrambe in  $x_0$ , non sono ivi entrambe infinitesime e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ .

I teoremi 1) e 2) si possono estendere, in generale, anche ai casi in cui  $l_1$  e  $l_2$  non siano entrambi finiti; l'unica eccezione è costituita dal caso in cui il limite risultante si presenti come differenza di due infiniti, cioè nella forma  $\infty - \infty$ , la quale può assumere qualsiasi valore (o, anche, non tendere ad alcun valore) e che, per questo, possiamo definire come **prima forma indeterminata**.

Allo stesso modo, il teorema 3) sul prodotto dei limiti è valido in generale anche nei casi in cui i due limiti  $l_1$  e  $l_2$  siano infiniti o nulli; l'unica eccezione è costituita dal caso in cui il limite risultante si presenti nella forma  $0 \cdot \infty$ , sulla quale, come per la precedente, nulla si può dire; definiamo tale espressione come **seconda forma indeterminata**.

Se dal teorema 5) si rimuovono le ipotesi di  $l_1$  e  $l_2$  finiti e  $l_2 \neq 0$ , la tesi, con le ovvie estensioni, continua in generale a sussistere, fatta eccezione per il caso in cui il limite risultante si presenti

nella forma  $\frac{0}{0}$ , detta **terza forma indeterminata**, oppure  $\frac{\infty}{\infty}$ , detta **quarta forma indeterminata**, sulle quali nulla si può dire.

Anche l'esempio III) si può generalizzare ai casi di limiti infiniti, fatta eccezione per i casi in cui il limite risultante si presenti in una delle seguenti forme, sulle quali nulla si può dire:  $0^0$ , detta **quinta forma indeterminata**,  $\infty^0$ , detta **sesta forma indeterminata**,  $1^\infty$ , detta **settima forma indeterminata**.

Anche se abbiamo individuato sette forme indeterminate, con opportune semplici manipolazioni algebriche, tali forme possono tutte ricondursi alle due forme indeterminate fondamentali  $\frac{0}{0}$  e  $\frac{\infty}{\infty}$ , utili per l'applicazione del teorema di L'Hospital, che verrà presentato a valle dello studio delle derivate nel capitolo terzo.

Ad esempio, se le funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  sono entrambe infinite in  $x_0$ , si effettua la trasformazione:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

e, se  $f(x)$  è infinita e  $g(x)$  infinitesima:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

sicché anche la terza forma indeterminata si riconduce alla seconda.

Si riportano di seguito alcuni **limiti fondamentali** che si presentano in forma indeterminata, ai quali è possibile spesso ricondursi anche nello studio delle funzioni, e che sono tutti dimostrabili per via elementare, cioè, senza adoperare il calcolo differenziale, ad esempio, il teorema di L'Hospital.

A tale teorema, infatti, è opportuno ricorrere solo quando necessario, cioè quando il calcolo del limite indeterminato non è, in qualche modo, semplificabile o riconducibile a quello di uno dei seguenti.

### LIMITI FONDAMENTALI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x = e^y$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

## 1.4 Esercizi sui limiti

### Esercizio n. 1.4.1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x-3}$$

✓ Tale limite si presenta nella forma indeterminata  $\frac{\infty}{\infty}$ , per eliminarla effettuiamo la sostituzione:

$$\sqrt[6]{x} = t \Rightarrow x = t^6$$

tenendo presente che  $t \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ , si ottiene:

$$\text{✎} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x-3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 + t^2}{t^6 - 3} = 0$$

in quanto il numeratore è un polinomio di 3° grado, mentre il denominatore è un polinomio di 6° grado.

### Esercizio n. 1.4.2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2}{1 - 3^{2x}}$$

✓ Con la sostituzione:

$$3^x = t$$

tenendo presente che  $t \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ , si ottiene:

$$\text{✎} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2}{1 - 3^{2x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t + 2}{1 - t^2} = 0$$

### Esercizio n. 1.4.3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x$$

$$\text{✎} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left( \frac{x+1}{x} \right)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{1}{e}$$

✓ dove si è utilizzato il limite fondamentale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

**Esercizio n. 1.4.4**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$$

✓ Si utilizza ancora il limite fondamentale dell'esercizio precedente:

$$\text{✎} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right] = \ln e = 1$$

**Esercizio n. 1.4.5**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^x$$

Dividendo per  $x$  numeratore e denominatore della frazione in parentesi, si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right)^x = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x}$$

✓ Il limite al denominatore è ben noto e vale  $e$ ; per quanto concerne il limite al numeratore, con la sostituzione:

$$-x = t$$

tenendo presente che  $t \rightarrow -\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ , si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{-t} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t} = \frac{1}{e}$$

donde il risultato:

$$\text{✎} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^x = \frac{1}{e} = \frac{1}{e^2}$$

**Esercizio n. 1.4.6**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

✓ La forma indeterminata  $\frac{0}{0}$  si può risolvere con la sostituzione:

$$x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$$

infatti, tenendo presente che  $t \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 1$ , si ottiene:

$$\text{✎} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

dove l'ultimo limite è un limite fondamentale.

**Esercizio n. 1.4.7**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

✓ dove si è effettuata la sostituzione:

$$\frac{1}{x} = t$$

tenendo presente che  $t \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

**Esercizio n. 1.4.8**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{ x [\ln(x+1) - \ln x] \}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{ x [\ln(x+1) - \ln x] \} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln e = 1$$

✓ dove si è fatto ricorso ancora una volta al limite fondamentale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

**Esercizio n. 1.4.9**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 1}{e^x - 1}$$

✓ Dividendo per  $x$  numeratore e denominatore si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{10^x - 1}{x}}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{\ln 10}{1} = \ln 10$$

✓ dove si è tenuto conto del limite fondamentale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \forall a > 0$$

# Indice Generale

Prefazione ..... Pag. 3

## ■ 1 Limiti di funzioni reali di una variabile reale

1.1	Definizione di limite .....	»	5
1.2	Teoremi sui limiti .....	»	5
1.3	Operazioni sui limiti e forme indeterminate .....	»	6
1.4	Esercizi sui limiti .....	»	10

## ■ 2 Continuità di funzioni reali di una variabile reale

2.1	Funzioni continue .....	»	27
2.2	Punti di discontinuità .....	»	27
2.3	Esercizi .....	»	29

## ■ 3 Derivate di funzioni reali di una variabile reale. Applicazioni

3.1	Definizione di derivata .....	»	41
3.2	Regole di derivazione .....	»	41
3.3	Crescenza e decrescenza in un punto. Massimi e minimi relativi ed assoluti .....	»	43
3.4	Teoremi sulle derivate. I teoremi di L'Hospital .....	»	44
3.5	Determinazione dei massimi e minimi di una funzione in un intervallo .....	»	46
3.6	Derivate di funzioni implicite .....	»	47
3.7	Derivate di funzioni in coordinate parametriche .....	»	48
3.8	Esercizi sulle derivate .....	»	49
3.9	Esercizi su limiti calcolabili con l'ausilio della regola di L'Hospital .....	»	57
3.10	Esercizi su massimi e minimi relativi ed assoluti .....	»	66
3.11	Esercizi sulle derivate di funzioni implicite .....	»	91

## 4 Problemi di calcolo differenziale in geometria e fisica

4.1	Problemi di massimo e minimo applicati alla geometria .....	»	95
4.2	Problemi di massimo e minimo applicati alla fisica .....	»	107

## Cosa contiene il CD ROM

- ✓ **Introduzione a Matlab**  
di *Robert Bucher* (della Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana)  
Matlab è uno dei programmi scientifici di maggior diffusione, grazie alle sue numerose applicazioni in campi quali l'elettronica, la controllistica, l'analisi dei segnali, l'elaborazione di immagini, la chimica, la statistica e numerosi altri.  
Viene utilizzato in molti corsi universitari e di ingegneria, e sono ormai numerose le pubblicazioni scientifiche che utilizzano l'ambiente di Matlab quale sostegno matematico della teoria.
- ✓ **Software free** per il calcolo scientifico  
Programmi (completamente gratuiti) alternativi a Matlab
- ✓ **Guida alle risorse Internet** per gli studenti delle facoltà tecniche e scientifiche  
Una esaustiva raccolta di link alle risorse gratuite disponibili online

Aggiornamenti, risorse, esercizi svolti sono disponibili al seguente indirizzo internet:  
**[www.sistemieditoriali.it/puntoexe](http://www.sistemieditoriali.it/puntoexe)**